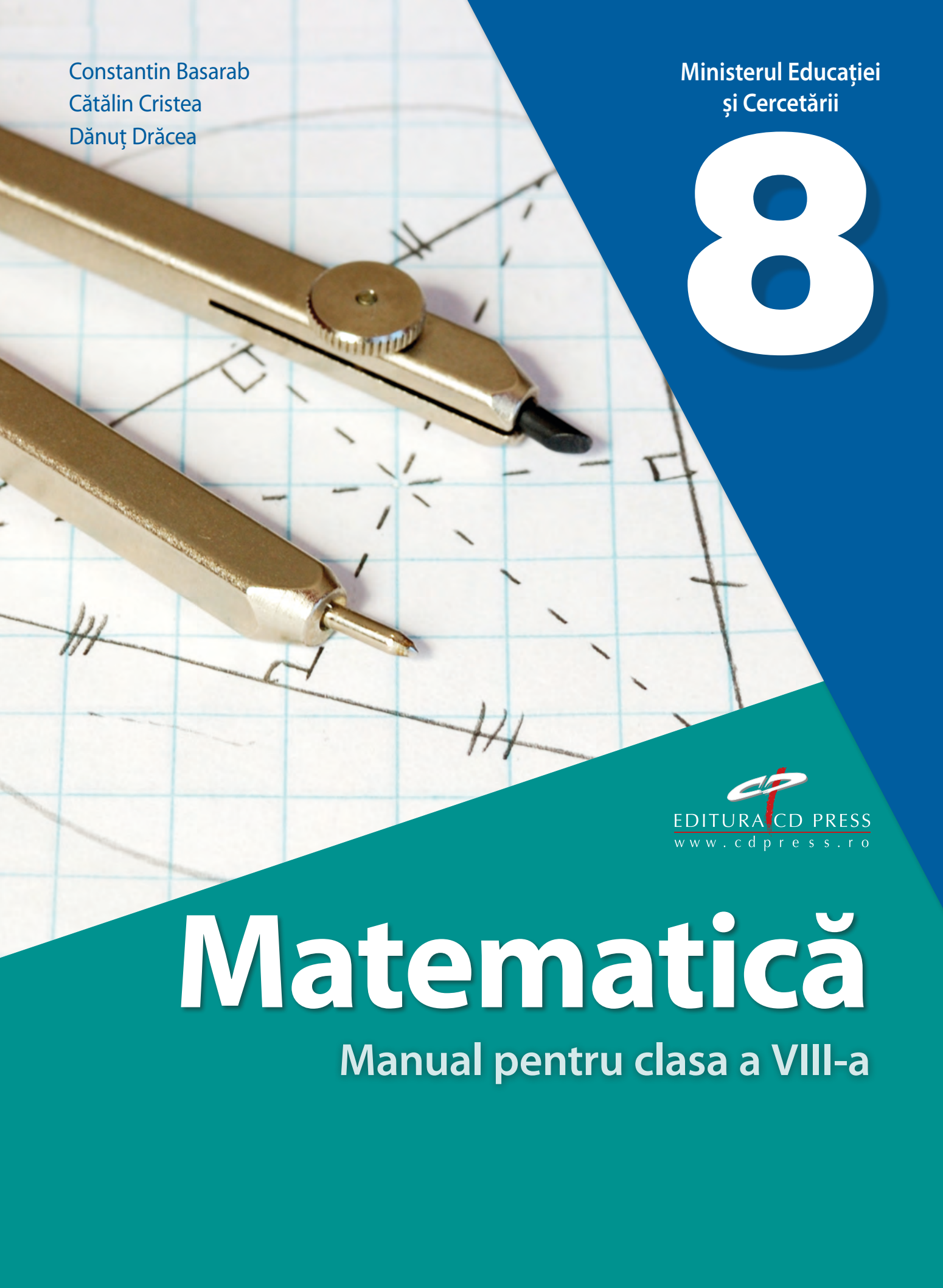


Constantin Basarab
Cătălin Cristea
Dănuț Drăcea

Ministerul Educației
și Cercetării

8



EDITURA CD PRESS
www.cdpress.ro

Matematică

Manual pentru clasa a VIII-a

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate
cu Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017.

Manualul școlar a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 6400/22.09.2025.

119 – Număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile
de abuz împotriva copiilor.

116.111 – Număr de asistență pentru copii,
în conformitate cu Legea nr. 272/2004 privind protecția și promovarea
drepturilor copilului, republicată, cu modificările și completările ulterioare.

Constantin Basarab
Cătălin Cristea
Dănuț Drăcea

Ministerul Educației
și Cercetării

8



EDITURA CD PRESS
www.cdpress.ro

Matematică

Manual pentru clasa a VIII-a

Editor: dr. Costin Diaconescu
Director editorial: Simona Dobrescu
Redactor-șef: Aura Gîgă
Redactor: Irina Tudor Dumitrescu, Ruxandra Enea
Layout și tehnoeditare: Irina Suciu
Tehnic și IT: Răzvan Socolov, Mihai Ivana

Matematică
Manual pentru clasa a VIII-a
ISBN: 978-606-528-818-8

© CD PRESS, 2025
Această lucrare, în format tipărit și electronic, este protejată de legile române și internaționale privind drepturile de autor, drepturile conexe și celelalte drepturi de proprietate intelectuală. Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă, stocată ori transmisă, sub nicio formă (electronic, fotocopiere etc.), fără acordul expres al Editurii CD PRESS.

Referenți științifici:
prof. univ. Ionel Roventă, Departamentul de matematică, Universitatea din Craiova
prof. grad I Liviu Smarandache, Colegiul Național Pedagogic „Ștefan Velovan”

Surse foto/ilustrații:
arhiva CD PRESS, Dreamstime, Wikimedia Commons – domeniu public

Editura CD PRESS
Telefon: 021.337.37.37
E-mail: office@cdpress.ro
Comenzi: manuale@cdpress.ro
Website: www.cdpress.ro
Facebook: f/Editura CD PRESS
Platformă de e-learning: www.ClasaDigitala.ro

Inspectoratul Școlar al Județului/Municipiului
Școala/Colegiul/Liceul

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*	
				format tipărit	
				la primire	la predare
1					
2					
3					
4					

*Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: **nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.**
• Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

CUPRINS

Prezentarea manualului	5
Competențe generale. Competențe specifice	6
PROBLEME RECAPITULATIVE	7

MULȚIMI. NUMERE

Unitatea 1

INTERVALE DE NUMERE REALE INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

LECTȚIA 1	Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor	12
LECTȚIA 2	Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalor	17
LECTȚIA 3	Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\geq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	24
LECTȚIA 4	Aplicații ale inecuațiilor în rezolvarea unor probleme practice	30
PROBLEME RECAPITULATIVE		32
RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE		33

ALGEBRĂ

Unitatea 2

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

LECTȚIA 1	Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere); reducerea termenilor asemenea	35
LECTȚIA 2	Formule de calcul prescurtat ($a \pm b$) = $a^2 \pm 2ab + b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$; ($a - b$)($a + b$) = $a^2 - b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$	41
LECTȚIA 3	Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul prescurtat)	45
LECTȚIA 4	Fracții algebrice	49

LECTȚIA 5	Operații cu fracții algebrice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere)	52
-----------	--	----

LECTȚIA 6	Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$	57
-----------	---	----

LECTȚIA 7	Aplicații ale ecuației de gradul al II-lea în rezolvarea unor probleme practice	61
-----------	---	----

PROBLEME RECAPITULATIVE	64
-------------------------------	----

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE	66
---	----

FUNCȚII. ORGANIZAREA DATELOR ȘI PROBABILITĂȚI

Unitatea 3

FUNCȚII

LECȚIA 1	Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule.....	69
LECȚIA 2	Graficul unei funcții Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice	76
LECȚIA 3	Funcții de forma $f:D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este mulțimea finită de numere reale sau $D = \mathbb{R}$	79
LECȚIA 4	Funcții de tipul $f:D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde D este un interval nedegenerat.....	83
LECȚIA 5	Interpretare geometrică Lecturi grafice	85
LECȚIA 6	Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date) ..	88
PROBLEME RECAPITULATIVE		93
RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE		
PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE		95



GEOMETRIE

Unitatea 4

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

LECȚIA 1 Puncte, drepte, plane:
convenții de notare, reprezentări 97

LECȚIA 2 Determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane..100

LECȚIA 3 Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat
Reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări..104

LECȚIA 4 Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul
Reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări..109

LECȚIA 5 Cilindrul circular drept; conul circular drept
Reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări..113

LECȚIA 6 Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte..... 116

LECȚIA 7 Dreaptă paralelă cu un plan .. 119

LECȚIA 8 Plane paralele 123

LECȚIA 9 Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpuri geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)..... 127

**RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE
PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE..... 130**

LECȚIA 10 Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan..132

LECȚIA 11 Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept 135

LECȚIA 12 Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept 138

**RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE
PRIN TEST DE AUTOEVALUARE 141**

LECȚIA 13 Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan 142

LECȚIA 14 Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment pe un plan ..146

LECȚIA 15 Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului, unghiul a două plane 149

LECȚIA 16 Plane perpendiculare 152

LECȚIA 17 Teorema celor trei perpendiculare
Calculul distanței de la un punct la o dreaptă 154

LECȚIA 18 Calculul distanței de la un punct la un plan
Calculul distanței dintre două plane paralele 157

**RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE
PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE 161**

Unitatea 5

ARI ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

LECȚIA 1 Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate (determinare prin calcul)..... 163

LECȚIA 2 Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prisme drepte (determinare prin calcul) 168

LECȚIA 3 Aria și volumul piramidei regulate (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat) 172

LECȚIA 4 Aria și volumul prisme drepte (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), paralelipiped dreptunghic, cub..... 178

**RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE
PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE..... 184**

LECȚIA 5 Aria și volumul cilindrului circular drept 186

LECȚIA 6 Aria și volumul conului circular drept 189

LECȚIA 7 Trunchiul de piramidă regulată
Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată..192

LECȚIA 8 Aria și volumul trunchiului de con circular drept 196

LECȚIA 9 Aria și volumul sferei 199

**RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE
PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE 202**

RECAPITULARE FINALĂ 205

**TESTE pentru pregătirea examenului de
EVALUARE NAȚIONALĂ..... 209**

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 215



PREZENTAREA MANUALULUI

Manualul dezvoltă capacitatea elevilor de a efectua operații logice de analiză, sinteză, comparație, generalizare, concretizare, de a explica pe bază de argumente, de a efectua raționamente inductive, deductive și analogice, de a gândi divergent, de a transfera cunoștințele în situații diferite și de a se autoevalua.

Se vizează formarea capacității elevilor de a operaționaliza cunoștințele dobândite, de a le utiliza în situații concrete de viață, în cotidian. Manualul nu se reduce la prezentarea unor descrieri și exemplificări, ci, prin scheme, modele, propoziții lacunare, întrebări și indicații, probleme, elevul este îndemnat să facă demersuri cognitive, investigații, fiind implicat direct în activitatea de „descoperire”.

Conținuturile cuprinse în programă au fost distribuite pe unități didactice (lecții) grupate în cinci unități de învățare. Subiectele au fost astfel înălțuite încât să se permită tratarea diferitelor părți ale programei în ordinea lor firească și progresivă. Activitățile și exercițiile relativ independente și foarte variate servesc scopurilor propuse, în concordanță cu capacitățile elevilor.

Ansamblul favorizează îmbinarea dintre munca independentă a elevilor și activitatea dirijată din clasă.

Manualul poate fi utilizat diferențiat în funcție de capacitățile de înțelegere ale elevilor și de obiectivele urmărite. Fiecare unitate didactică, numită lecție, reactivează sistemul de cunoștințe anterior asimilate, îl familiarizează pe elev cu terminologia cercetării, îl antrenează în descoperirea de noi cunoștințe, de tehnici de lucru, de procedee, proprietăți, noțiuni, pornind de la condiții date, prin aplicarea unui raționament inductiv. În cadrul fiecărei unități didactice sunt sistematizate noțiunile și procedeele prezentate, realizând o sinteză riguroasă și accesibilă, prin *comentarii*, *exemple* și *observații*.

Secțiunea **Probleme rezolvate** oferă modele pentru rezolvarea unor tipuri noi de probleme, referitoare la cunoștințele nou dobândite.

Secțiunea **Probleme**, din cadrul fiecărei unități de învățare, oferă aplicații variate prin care elevul are posibilitatea să fixeze, să aprofundeze, să dezvolte și să aplice creator cunoștințele dobândite, iar profesorul poate să evalueze continuu cunoștințele, priceperile și deprinderile elevilor. În același timp, această secțiune permite elevului să se autoevalueze, folosind și răspunsurile care sunt prezente în manual.

Manualul cuprinde rubrica **Probleme recapitulative**, care realizează, prin problemele propuse spre rezolvare, o legătură între ultimele cunoștințe dobândite. Rubrica **Recapitulare și sistematizare prin teste de autoevaluare** permite realizarea unui portofoliu pe întregul an școlar de către fiecare elev în parte.

În rubrica **Recapitulare finală**, sunt propuse spre rezolvare teste realizate în concordanță cu subiecte propuse la examenul de *Evaluare Națională*. În plus manualul oferă prin rubricile **Proiect** și **Investigație** metode complementare pentru realizarea portofoliului personal. Pentru finalizarea pregătirii examenului de *Evaluare Națională* sunt propuse **Teste pentru pregătirea examenului de E.N.**



Descoperă în manualul digital activități multimedia interactive de învățare (AMII) legate de tema lecției. Acestea sunt evidențiate în varianta digitală și în cea tipărită prin simbolurile următoare:



COMPETENȚE GENERALE

COMPETENȚE SPECIFICE

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

C.G. 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- 1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- 1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- 1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
- 1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
- 1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

C.G. 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- 2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- 2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
- 2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
- 2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

C.G. 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$
- 3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- 3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
- 3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
- 3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

C.G. 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- 4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- 4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
- 4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
- 4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice

C.G. 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- 5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- 5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- 5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
- 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
- 5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date

C.G. 6. Modelarea matematică a unei situații date prin, integrarea achizițiilor din diferite domenii

- 6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații
- 6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat
- 6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală
- 6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale
- 6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1 Se consideră mulțimile
 $X = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ și $Y = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.
 Determină mulțimile $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$ și $Y \setminus X$.
- 2 Determină mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
 i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
 ii) $A \cap B = \{4, 5, 6\}$; iii) $\text{card}(A) < \text{card}(B)$.
- 3 Se consideră mulțimea
 $M = \{4; \sqrt{25}; -1, (6); \sqrt{37}; \sqrt{1, (7)}; -\sqrt{2025}\}$.
 Determină mulțimile:
 $M \cap \mathbb{N}$, $M \cap \mathbb{Z}$, $M \cap \mathbb{Q}$, $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
- 4 Stabilește dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false.
 a) „Numărul $-\sqrt{36}$ este întreg”.
 b) „Suma dintre opusul numărului $\sqrt{3}$ și modulul numărului $-\sqrt{3}$ este $2\sqrt{3}$ ”.
 c) „Numărul $\sqrt{15^2 + 20^2} : (-5)^2$ este natural”.
 d) „Media aritmetică a numerelor $x = 7 + 2\sqrt{3}$ și $y = 5 - \sqrt{12}$ este egală cu 12”.
- 5 Se consideră $a = \left(\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{40}} - \frac{4}{5\sqrt{10}} \right) \cdot \frac{\sqrt{1000}}{27}$.
 a) Arată că $a = 1$.
 b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația:
 $(x + \sqrt{256})^2 = a$.
- 6 Se consideră x și y numere reale cu proprietatea
 $\sqrt{(x - 3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(y - 6\sqrt{2})^2} \leq 0$.
 a) Calculează media aritmetică a numerelor x și y .
 b) Calculează media geometrică a numerelor x și y .
- 7 Se consideră numerele:
 $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{54}} + \frac{4}{\sqrt{48}} \right) : \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ și
 $b = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18}$.
 a) Arată că $a = 2$. b) Calculează $(a - 4 \cdot b)^{100}$.
- 8 a) Arată că numărul $a = \sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 19}$ este rațional.
 b) Arată că numărul $b = \sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 19 + 2}$ este irațional.
- 9 a) Ordonează crescător numerele:
 $x = 7,4(1)$; $y = 7,41$; $z = 7,(41)$; $t = 7,4$.
 b) Ordonează descrescător numerele:
 $a = -3\sqrt{7}$; $b = -8$; $c = -6\sqrt{2}$; $d = -\sqrt{67}$.
- 10 a) Determină cel mai mic număr natural n cu proprietatea $(\sqrt{2})^n > 10$.
 b) Determină cel mai mare număr natural m cu proprietatea $(\sqrt{3})^m < 7$.
- 11 Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 a) $2 \cdot (3 - 4x) + 5 = 6(7x - 8) - 9$;
 b) $\frac{7-2x}{3} - 1, (6) = 1\frac{1}{6} - \frac{2-x}{2}$.
- 12 Rezolvă în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:
 a) $5(2x - 1) \leq 9(x + 1) - 10$;
 b) $\sqrt{3} \cdot x + 6 > 2x + \sqrt{27}$.
- 13 Rezolvă în mulțimea numerelor reale sistemele de ecuații:
 a) $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 7x + 2y = 11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sqrt{5} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 10 \\ 3x + 5y = 6\sqrt{5} \end{cases}$.
- 14 Un telefon costă 1 500 lei.
 a) Care este prețul telefonului după o scumpire cu 10%?
 b) Determină cu ce procent trebuie să crească prețul telefonului, astfel încât să coste 1 800 lei.
- 15 Dacă elevii unei clase stau câte doi, sau câte trei, sau câte cinci în bancă, toate băncile sunt ocupate și nu rămân elevi în picioare.
 a) Este posibil ca numărul elevilor din clasă să fie 36?
 b) Câți elevi sunt în clasă, știind că numărul elevilor este cuprins între 20 și 40?
- 16 a) Calculează aria unui triunghi echilateral care are perimetrul egal cu 18 cm.
 b) Calculează lungimea înălțimii unui romb, știind că diagonalele au lungimile de 30 cm, respectiv 40 cm.

- 17 În figura 1 este prezentată schița unei săli de sport având forma unui pătrat $ABCD$ cu $AB = 30$ m. Punctele E, F, H și G sunt mijloacele segmentelor OA, OB, OC , respectiv OD . Suprafața $EFHG$ este acoperită cu parchet, restul este acoperit cu gresie. Calculează aria suprafeței acoperită cu gresie.

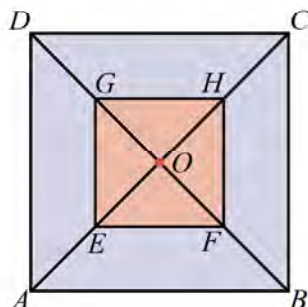


Figura 1

- 18 În figura 2 este reprezentat trapezul dreptunghic $MNPQ$, $\widehat{M} = \widehat{Q} = 90^\circ$, $MQ = QP = \frac{MN}{2}$. Calculează măsura unghiului MPN .

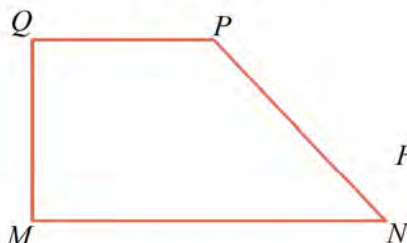


Figura 2

- 19 În figura 3, se știe că $ABCD$ este un paralelogram $AB = 2 \cdot BC$, $BD \perp BC$ și E este simetricul punctului C față de punctul B .
- Stabilește natura triunghiului CDE .
 - Dacă $AC \cap BD = \{O\}$ și $DE \cap AB = \{F\}$, demonstrează că $OF = \frac{AB}{4}$.

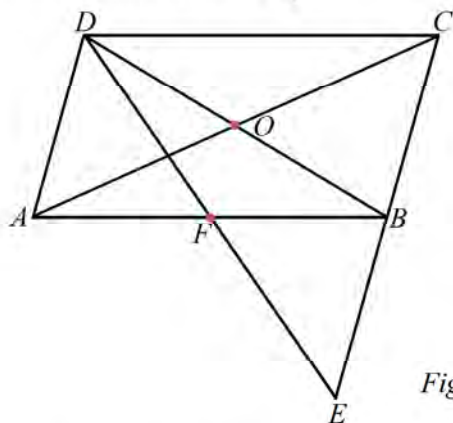


Figura 3

- 20 În cercul de centru O din figura 4, coardele AC și BD sunt congruente. Dacă $\widehat{AOB} = 60^\circ$ și $\widehat{AOC} = 80^\circ$, calculează măsura arcului mic CD .

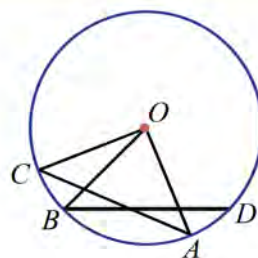


Figura 4

- 21 Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A și B , astfel încât distanța de la punctul O la dreapta AB este egală cu 6 cm. Știind că $AB = 16$ cm, calculează lungimea și aria cercului.
- 22 Pe cercul de centru O din figura 5, se consideră punctele A, B și C , astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral. Tangenta în punctul A la cerc intersectează dreapta BO în punctul D .
- Arată că dreapta DC este tangentă la cerc.
 - Știind că $OA = 9\sqrt{3}$ cm, calculează aria patrulaterului $ABCD$.

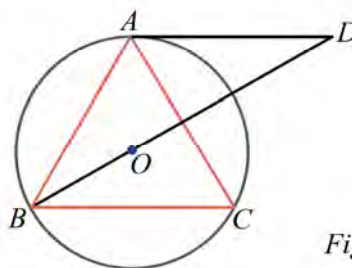


Figura 5

- 23 Punctele A, B, C și D se află pe cercul de centru O și raza egală cu 6 cm. AC și BD sunt diametre ale cercului, $AC \perp BD$. Calculează aria suprafeței cuprinse între interiorul cercului și exteriorul patrulaterului $ABCD$ (vezi figura 6).

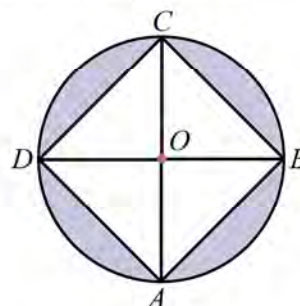


Figura 6

- 24 În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, $AB > CD$, $AB = 10$ cm. Se știe că înălțimea trapezului este egală cu 8 cm.
- Arată că $CD = 6$ cm.
 - Calculează aria triunghiului PAB , unde $\{P\} = AD \cap BC$.

- 25** a) În triunghiul ABC , ducem $DE \parallel BC$, D se află pe latura AB , E se află pe latura AC . Știind că $AD = 3$ cm, $DB = 9$ cm și $AE = 4$ cm, calculează lungimea segmentului EC .
- b) În triunghiul MNP , punctele Q și R se află pe laturile MN , respectiv MP , astfel încât $MQ = 2 \cdot QN$ și $MP = 3 \cdot RP$. Demonstrează că $QR \parallel NP$.

- 26** În figura 7, triunghiul DEF este dreptunghic $\widehat{D} = 90^\circ$, $EF = 10$ cm și $DE = 8$ cm. Punctul P este situat pe latura DF astfel încât $DP = 2 \cdot PF$.

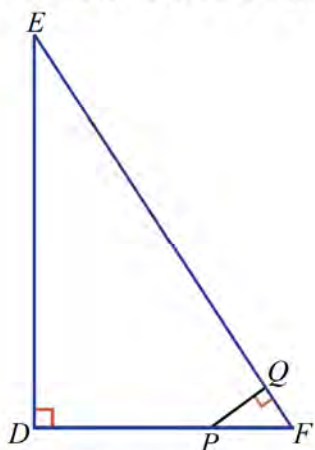


Figura 7

- a) Arată că $DP = 4$ cm.
- b) Dacă $PQ \perp EF$, $Q \in EF$, calculează perimetrul triunghiului PQF .
- 27** În triunghiul isoscel ABC , $AB = AC = 5$ cm și $BC = 6$ cm.
- a) Calculează aria triunghiului ABC .
- b) Calculează lungimea înălțimii din B a triunghiului ABC .
- 28** În figura 8 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$ și $BC = 10$ cm. Ducem $AD \perp BC$, $D \in BC$. Se știe că $2 \cdot BD = 3 \cdot CD$.

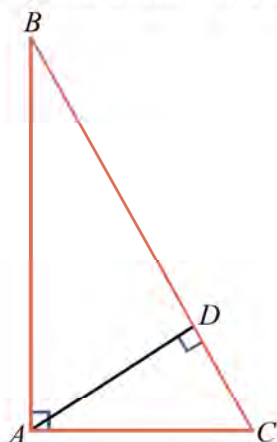


Figura 8

- a) Arată că $AD = 2\sqrt{6}$ cm.
- b) Dacă E și F sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv AC , calculează perimetrul triunghiului DEF .

- 29** În figura 9 este reprezentat trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = AD = 10$ cm și $\widehat{ADC} = 60^\circ$.
- a) Demonstrează că DB este bisectoarea unghiului ADC .
- b) Calculează distanța de la punctul A la dreapta BD .

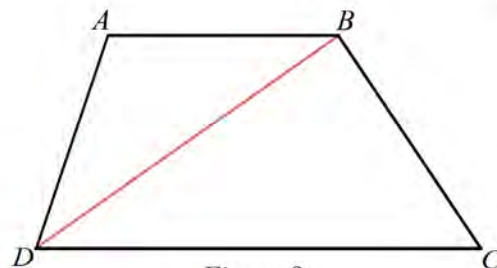


Figura 9

- 30** În figura 10 este reprezentată o placă de gresie având forma unui dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 36$ cm și $BC = 12$ cm. Punctele M și N se află pe latura AB astfel încât $AM = MN = NB$, iar punctele P și Q se află pe latura CD astfel încât $CP = PQ = QD$. Suprafețele ADQ și $MNCP$ au culoarea galben, iar suprafețele BCN și $AMPQ$ au culoarea mov.

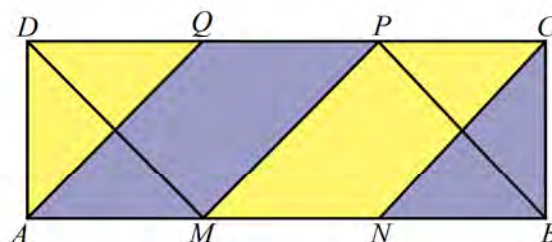


Figura 10

- a) Arată că aria suprafețelor de culoare galben este egală cu aria suprafețelor colorate cu mov.
- b) Calculează aria triunghiului ABS , unde $\{S\} = AQ \cap BP$.
- 31** Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, cu $AB + CD = BC$. Notăm cu E mijlocul lui AD .
- a) Arată că $\widehat{BEC} = 90^\circ$.
- b) Demonstrează că aria trapezului $ABCD$ este dublul ariei triunghiului BEC .

TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (20 de puncte).

- 5p 1 Dintre numerele $1,5$; $\sqrt{121}$; $-\sqrt{5,(4)}$; $\sqrt{1025}$ este irațional numărul:
 A. 1,5 B. $\sqrt{121}$ C. $-\sqrt{5,(4)}$ D. $\sqrt{1025}$
- 5p 2 Numărul $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^2} : \sqrt{3^5}$ aparține mulțimii:
 A. $\mathbb{N}$ B. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ D. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- 5p 3 Numărul natural a pentru care $\sqrt{1008} = a\sqrt{7}$ este:
 A. 144 B. 12 C. 11 D. 14
- 5p 4 Numărul întreg m pentru care $m < -\sqrt{63} < m+1$ este:
 A. -7 B. -8 C. -9 D. -6

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (20 de puncte).

- 5p 1 Dreptunghiul $ABCD$ are perimetrul egal cu 36 cm și $AB = 2 \cdot BC$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu:
 A. 108 cm^2 B. 54 cm^2 C. 144 cm^2 D. 72 cm^2
- 5p 2 Fie $ABCD$ un romb cu $AB = BD$. Numărul $\sin \widehat{BAC} + \cos \widehat{CBD}$ este egal cu:
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$
- 5p 3 Aria unui triunghi echilateral înscris într-un cerc este $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Lungimea cercului circumscris triunghiului este egală cu:
 A. $4\pi \text{ cm}$ B. $8\pi \text{ cm}$ C. $16\pi \text{ cm}$ D. $4\sqrt{3}\pi \text{ cm}$
- 5p 4 Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor de 6 cm și 8 cm. Distanța dintre centrul de greutate al triunghiului și centrul cercului circumscris triunghiului este egală cu:
 A. 10 cm B. 5 cm C. $\frac{5}{3} \text{ cm}$ D. $\frac{10}{3} \text{ cm}$

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

- 20p 1 a) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{2-x}{6} - \frac{4+x}{3} = -\frac{3x}{2} - 10$.
 b) Un elev a primit un premiu în lei după participarea la un concurs. În prima zi a cheltuit 25% din suma primită, iar a doua zi a cheltuit 30% din rest. Știind că i-au mai rămas 105 lei, află ce sumă a primit elevul.
- 30p 2 În figura 11 este reprezentat triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC = 20 \text{ cm}$ și $BC = 24 \text{ cm}$. Ducem $BE \perp AC$, $E \in AC$.
 a) Calculează aria triunghiului ABC .
 b) Calculează lungimea înălțimii BE .
 c) Care este lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC ?

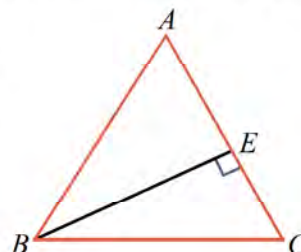


Figura 11

TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (20 de puncte).

- 5p 1 Dintre numerele $6\sqrt{2}$; $\sqrt{74}$; $5\sqrt{3}$; $2\sqrt{17}$ cel mai mare este:
 A. $6\sqrt{2}$ B. $\sqrt{74}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{17}$
- 5p 2 Produsul soluțiilor ecuației $6 - x^2 = -3$ este:
 A. 3 B. -3 C. 6 D. -9
- 5p 3 Numărul $\sqrt{7^2 + 24^2}$ este egal cu:
 A. 31 B. 29 C. 5 D. 25
- 5p 4 Cel mai mic număr natural n cu proprietatea $2^n > \sqrt{101}$ este:
 A. 7 B. 2 C. 3 D. 4

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (20 de puncte).

- 5p 1 În triunghiul ABC , ducem $DE \parallel BC$, $D \in AB$ și $E \in AC$. Dacă $AD = (x-1)$ cm, $BD = (x+1)$ cm, $AE = 2$ cm și $CE = 3$ cm, lungimea segmentului AB este egală cu:
 A. 5 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 8 cm
- 5p 2 Punctele M , N , P și Q sunt situate, în această ordine, pe un cerc, astfel încât $\widehat{MN} = \frac{\widehat{NP}}{2} = \frac{\widehat{PQ}}{3} = \frac{\widehat{QM}}{4}$. Măsura arcului mic $\widehat{MP}$ este egală cu:
 A. 36° B. 108° C. 144° D. 72°
- 5p 3 Într-un pătrat, produsul lungimilor diagonalelor este egal cu 200 cm^2 . Perimetrul pătratului este egal cu:
 A. 20 cm B. 60 cm C. 80 cm D. 40 cm
- 5p 4 În triunghiul ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB = 5$ cm și $AC = 12$ cm, ducem $AD \perp BC$, $D \in BC$. Raportul ariilor triunghiurilor ADB și ADC este egal cu:
 A. $\frac{25}{144}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{144}{25}$ D. $\frac{12}{5}$

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

- 20p 1 a) Rezolvă în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații
$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{7} \cdot y = 0 \\ 3\sqrt{7} \cdot x + 5\sqrt{2} \cdot y = 31. \end{cases}$$

 b) Stabilește dacă numărul $x = \sqrt{(2\sqrt{7} - 5)^2} - \sqrt{(3\sqrt{7} - 8)^2} - \sqrt{175}$ este rațional sau irațional.

- 30p 2 În figura 12 este reprezentat paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, M este mijlocul lui AB , $AB = 12$ cm, $OM = 3$ cm și $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

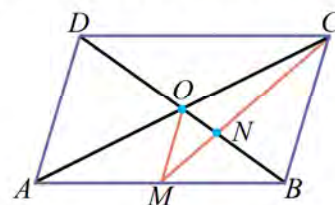


Figura 12

- a) Arată că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 36 cm.
 b) Calculează măsura unghiului DMC .
 c) Calculează lungimea segmentului MN , unde $\{N\} = CM \cap BD$.

Descarcă din manualul digital, apoi completează fișa de observare a unității.

1

INTERVALE DE NUMERE REALE
INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

UNITATEA

LECȚIA 1

Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor

Noțiuni recapitulative

Conceptul de mulțime este unul dintre cele mai importante ale matematicii moderne. Deși apărut târziu în istoria matematicii, secolul al XIX-lea, studiul mulțimilor este acum prezent în orice început de cunoaștere din școala elementară.



Definirea unei mulțimi

Noțiunea de mulțime nu se definește în raport cu alte noțiuni mai simple. Mulțimea este o *colecție* bine definită, considerată ca entitate. Elementele mulțimii se bucură în exclusivitate de una sau mai multe proprietăți comune.

Numărul de elemente ale unei mulțimi finite poartă numele de *cardinalul acelei mulțimi*.



Descrierea unei mulțimi

Unele mulțimi pot fi descrise prin cuvinte, alte mulțimi pot fi descrise prin enumerarea elementelor sau cu ajutorul unor proprietăți caracteristice elementelor mulțimii respective ori cu ajutorul diagramelor *Venn-Euler*.

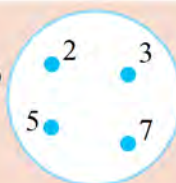
Exemple

1. A este mulțimea primelor patru numere naturale prime.

2. $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

3. $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ cifră}; x \text{ număr prim}\}$.

4. D



În exemplele anterioare, observăm că mulțimile A , B , C și D au aceleași elemente, adică $A = B = C = D$ și $\text{card} A = 4$.

- Dacă un element x se regăsește printre elementele unei mulțimi A , vom spune că „ x aparține mulțimii A ” și vom scrie $x \in A$.
- Dacă fiecare element al mulțimii A este și în mulțimea B , atunci vom spune că „mulțimea A este inclusă în mulțimea B ” și scriem $A \subset B$. În acest caz vom spune și că A este o „submulțime” a mulțimii B .
- Mulțimea vidă, notată „ $\emptyset$ ”, este o submulțime a oricărei mulțimi. Practic, mulțimea vidă nu are niciun element.

Comentariu

În unele situații, poate fi dificilă demonstrarea egalității a două mulțimi arătând că elementele sunt aceleași.

În acest caz, putem folosi și demonstrarea egalității cu ajutorul dublei incluziuni, adică $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$.

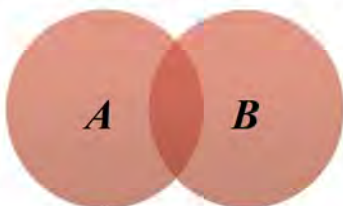


Trei operații cu mulțimi

• Reuniunea

Definim reuniunea a două mulțimi A și B , mulțimea notată „ $A \cup B$ ”, definită prin proprietatea că are toate elementele fie din A , fie din B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

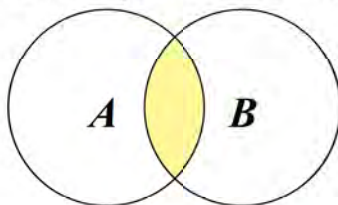


Reuniunea lui A și B .

• Intersecția

Definim intersecția a două mulțimi A și B , mulțimea notată „ $A \cap B$ ”, definită prin proprietatea că are toate elementele care aparțin simultan și lui A și lui B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

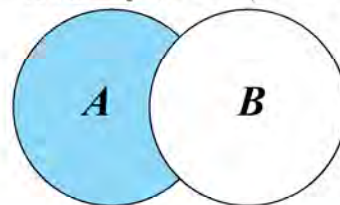


Intersecția lui A și B .

• Diferența

Definim diferența a două mulțimi A și B , mulțimea notată „ $A \setminus B$ ”, definită prin proprietatea că are toate elementele din mulțimea A , care nu se regăsesc în B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$



Diferența dintre A și B .

Mulțimi numerice remarcabile

Matematica poate fi descrisă ca o știință a numerelor, a formelor, a structurilor și a relațiilor dintre acestea.

Noțiunea de număr este esențială în studiul matematicii. Primele numere utilizate de oameni au fost numerele naturale. Cu ajutorul numerelor naturale, putem stabili numărul elementelor unei mulțimi finite sau putem preciza al câtelea loc îl ocupă un obiect într-o succesiune de obiecte. Numerele naturale se dovedesc insuficiente în procesele de măsurare. Putem înțelege necesitatea de a extinde succesiv mulțimea de numere în care lucrăm, pornind de la rezolvarea unor ecuații:

- ecuația $x + a = b$, unde a și b sunt numere naturale, nu are întotdeauna soluție în mulțimea numerelor naturale. De aici, necesitatea introducerii numerelor întregi;
- ecuația $ax = b$, unde a și b sunt numere întregi cu $a \neq 0$, nu are întotdeauna soluție în mulțimea numerelor întregi. De aici, necesitatea introducerii numerelor raționale;
- ecuația $x^2 = a$, unde a este un număr rațional pozitiv, nu are întotdeauna soluții în mulțimea numerelor raționale. De aici, necesitatea introducerii numerelor reale.



Mulțimea numerelor naturale este: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$



Mulțimea numerelor întregi cuprinde numerele naturale și opusele lor:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Orice număr natural este în același timp întreg, deci $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



Mulțimea numerelor raționale este mulțimea tuturor numerelor ce se pot scrie sub forma unor rapoarte de numere întregi. Denumirea de număr rațional este legată de cuvântul „ratio”, însemnând raport.

Această mulțime se definește astfel:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Din faptul că orice număr întreg n se poate scrie sub forma $\frac{n}{1}$, rezultă că $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Un număr rațional se poate exprima într-o infinitate de moduri sub formă de fracție ordinară și în mod unic sub formă de număr zecimal (fracție zecimală). De exemplu, $-\frac{2}{5} = -\frac{4}{10} = -\frac{6}{15} = \dots = -0,4$.



Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale se realizează împărțind numărătorul la numitor. Se obțin fracții zecimale cu un număr finit de zecimale sau cu o infinitate de zecimale care se succed periodic.

De exemplu, $\frac{19}{4} = 4,75$; $\frac{13}{7} = 1,857142857142... = 1,(857142)$; $\frac{17}{6} = 2,833... = 2,8(3)$.

Reciproc, orice fracție zecimală finită sau periodică se poate transforma în fracție ordinară după regulile cunoscute.

De exemplu, $2,175 = \frac{2175}{1000} = \frac{87}{40}$; $2,(175) = 2\frac{175}{999}$;
 $2,17(5) = 2\frac{175-17}{900} = 2\frac{79}{450}$; $2,1(75) = 2\frac{175-1}{990} = 2\frac{29}{165}$.

Deci, mulțimea numerelor raționale poate fi caracterizată și astfel:

$\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor zecimale finite sau periodice

⇒ Mulțimea numerelor reale

Relațiile metrice în geometrie furnizează exemple de numere care nu pot fi exprimate sub formă de fracție ordinară.

Exemple

1. Dacă măsurăm lungimea unui cerc folosind ca unitate de măsură diametrul cercului, obținem numărul π . S-a demonstrat de către *J. H. Lambert* în anul 1767 că numărul π nu este rațional (nu poate fi exprimat sub forma unui raport de numere întregi). Se pot calcula (utilizând metode neelementare) oricât de multe zecimale ale lui π . Întrucât acest număr este irațional, el se scrie cu o infinitate de zecimale care nu se succed periodic.

Valoarea aproximativă a lui π cu două zecimale exacte (folosită de obicei în calcule) este 3,14.

Pentru a memora primele 8 zecimale ale lui π , se poate folosi propoziția:

Așa e ușor a scrie renumitul și utilul număr.

$\underbrace{3}_3 \underbrace{1}_1 \underbrace{4}_4 \underbrace{1}_1 \underbrace{5}_5 \underbrace{9}_9 \underbrace{2}_2 \underbrace{6}_6 \underbrace{5}_5$

Scriind cifrele ce arată câte litere conțin cuvintele propoziției considerate, găsim $\pi = 3,14159265....$

2. Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel de catetă 1 este $\sqrt{2}$. Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrăm că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional. Presupunem că $\sqrt{2}$ este număr rațional și notăm cu $\frac{m}{n}$ reprezentantul acestui număr sub formă de fracție ireductibilă, adică avem $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $(m, n) = 1$. De aici rezultă că $2n^2 = m^2$; $2 \mid m^2$ deci $2 \mid m$, prin urmare există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = 2p$. Înlocuind în relația $2n^2 = m^2$, obținem $2n^2 = 4p^2$, echivalent cu $n^2 = 2p^2$. Deducem că $2 \mid n^2$ de unde $2 \mid n$. Faptul că m și n sunt divizibile cu 2 este în contradicție cu presupunerea că m și n sunt prime între ele. Contradicția la care am ajuns dovedește că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Definiție

Un număr scris sub formă de fracție zecimală infinită, neperiodică se numește *număr irațional*.

De exemplu, numărul 0,121221222122221... este o fracție zecimală infinită și neperiodică, deci este un număr irațional.

Se poate demonstra prin metoda reducerii la absurd următoarea

Proprietate

Dacă n este un număr natural care nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este număr irațional.

Cu ajutorul proprietății putem afirma, deci, că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$ sunt numere iraționale.

Definiție

Mulțimea numerelor reale este reuniunea mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale.

Mulțimea numerelor reale se notează cu $\mathbb{R}$. Din definiția mulțimii numerelor reale rezultă:

- mulțimea numerelor iraționale este $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- are loc incluziunea $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

REȚINE!

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Se folosește notația $\mathbb{R}^*$ pentru mulțimea numerelor reale nenule (analog notațiilor $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$, reprezentând respectiv mulțimea numerelor naturale nenule, mulțimea numerelor întregi nenule și mulțimea numerelor raționale nenule).



Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

Orice submulțime a mulțimii $\mathbb{R}$ se individualizează prin proprietăți specifice.

Exemple

1. Mulțimea numerelor reale pozitive notată $\mathbb{R}_+$ se definește astfel:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}.$$

2. Mulțimea numerelor reale strict negative, notată $\mathbb{R}_-^*$ se definește astfel:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}.$$

3. Mulțimea numerelor reale care sunt soluții ale ecuației $x\sqrt{2} = \sqrt{3}$ se definește astfel:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x\sqrt{2} = \sqrt{3}\}.$$

Această mulțime este formată dintr-un singur element, anume $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Deci $A = \left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

4. Mulțimea numerelor reale care sunt soluții ale ecuației $x^2 = -2$ se definește astfel:

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 = -2\}.$$

Deoarece nu există numere reale al căror pătrat este -2 , concludem că $B = \emptyset$.

Concluzie

O mulțime A de numere reale ale cărei elemente verifică o proprietate P , o putem reprezenta astfel:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \text{ cu proprietatea } P\}.$$



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



1 Fie mulțimea

$$A = \{-1, 5; 0; \sqrt{2}; -2; 0, (3); -\sqrt{9}; \pi; \frac{91}{7}; \frac{3}{4}; 1\frac{2}{3}; \sqrt{6, 25}\}$$

Determină mulțimile următoare:

- $B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbb{N}\};$
- $C = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbb{Z}\};$
- $D = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbb{Q}\};$
- $E = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$

2 Scrie mulțimile de mai jos cu ajutorul unor proprietăți ale elementelor lor:

- $A = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\};$
- $B = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\};$
- $C = \{-1, 1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\};$
- $D = \{0, 7, 14, 21, \dots\};$ e) $E = \{-1, 1\}.$

3 Determină elementele mulțimilor următoare:

- $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = \sqrt{2}\};$
- $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 = 5\};$
- $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0\};$
- $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| = 3\}.$

4 Fie mulțimea

$$M = \{\frac{111}{3}; -\sqrt{7}; 1, 0(2); \pi; \sqrt{16}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

Determină mulțimile:

- $M \cap \mathbb{N};$ b) $M \cap \mathbb{Z};$ c) $M \cap \mathbb{Q};$
- $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q});$ e) $A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\};$
- $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\}.$

5 Fie mulțimea

$$A = \{0^{43}; (-1)^0; \frac{91}{7}; -\sqrt{2025}; \sqrt{21}; \sqrt{1, (7)}\}.$$

Determină mulțimile:

- $A \cap \mathbb{N};$
- $A \cap \mathbb{Z};$ c) $A \cap \mathbb{Q};$ d) $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$

6 Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5x - 7 = 2x + 2\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{75 + 3x} = \sqrt{300}\};$$

$$C = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 7x - 8y = -9 \text{ și } 3x + 4y = 11\};$$

$$D = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 25^n \cdot 125^7 = 5^{31}\}.$$

7 Determină elementele mulțimilor:

- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{10}{x+1} \in \mathbb{N}\};$
- $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{4x+1} \in \mathbb{Z}\};$
- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6x+4}{3x-1} \in \mathbb{N}\};$
- $D = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+10}{3x-4} \in \mathbb{Z}\}.$

8 Scrie elementele mulțimilor:

- $M = \{x \mid x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \overline{23x} : 2\};$
- $A = \{x \mid x \in \{1, 2, \dots, 9\}, \overline{x2x} : 3\};$
- $T = \{x \mid x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \overline{98x7} : 9\};$
- $E = \{x \mid x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \overline{7x5} : 25\}.$

9 Se consideră mulțimile

 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este număr prim mai mic decât } 15\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \text{ este cifră}\}.$ Arată că are loc egalitatea:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

10 Se consideră mulțimile

 $E_a = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < a\}, a \in \mathbb{N},$ și $F = \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ este divizibil cu } 5\}.$

- Arată că există trei numere naturale distincte a_1, a_2, a_3 cu $E_{a_1} = E_{a_2} = E_{a_3}.$
- Scrie mulțimea E_a prin enumerarea elementelor.
- Determină numerele naturale a pentru care mulțimea $E_a \cap F$ are 15 elemente.

11 Se consideră mulțimea

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

- Determină mulțimile: $A = \{x \in X \mid x : 2\},$
 $B = \{x \in X \mid x : 3\},$ $C = \{x \in X \mid x : 9\}.$
- Verifică egalitățile:
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ și
 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$



LECȚIA 2

Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor;
intersecția și reuniunea intervalelor

Intervale mărginite

ACTIVITĂȚI PREGĂTITOARE

Considerăm câteva exemple din viața cotidiană care conduc la noțiunea de interval.

- Valorile normale ale unor indicatori din domeniul sănătății nu sunt fixe, ci oscilează între anumite valori extreme. Astfel, glicemia g (exprimată în mg/dl) se consideră normală, dacă ia valori cuprinse între 70 și 110, adică $70 \leq g \leq 110$.

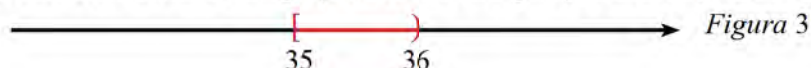
Spunem că g ia valori în intervalul mărginit cu extremitățile (capetele) în 70 și 110. Se notează acest interval cu $[70, 110]$. Extremitățile intervalului sunt elemente ale acestuia, adică $70 \in [70, 110]$ și $110 \in [70, 110]$. Spunem că intervalul este închis (vezi figura 1).



- Dacă măsurăm capacitatea unui vas cu ajutorul unui pahar de un decilitru, obținând 20 de pahare pline și al 21-lea incomplet, atunci avem $20 < c < 21$, unde am notat cu c , capacitatea vasului exprimată în decilitri. Spunem că numărul real c ia valori într-un interval mărginit cu extremitățile (capetele) în 20 și 21. Pentru a exprima faptul că extremitățile nu sunt elemente ale intervalului, spunem că intervalul este deschis și îl notăm cu $(20, 21)$ (vezi figura 2).



- Pentru a măsura timpul în care un sportiv parcurge o distanță dată, utilizăm un cronometru al cărui ac indică fiecare secundă. Dacă cronometrul indică 35, deducem că timpul t exprimat în secunde verifică relația $35 \leq t < 36$. Numărul real t ia valori într-un interval mărginit cu extremitățile în 35 și 36, astfel încât extremitatea stângă 35 aparține intervalului, iar extremitatea dreaptă nu aparține. Spunem că intervalul este închis la stânga și deschis la dreapta și îl notăm $[35, 36)$ (vezi figura 3).



NOȚIUNI TEORETICE

Definițiile intervalelor mărginite sunt rezumate în tabelul următor, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

Mulțimea	Notăția	Denumirea	Reprezentarea geometrică
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Interval închis de extremități a și b	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	Interval deschis de extremități a și b	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Interval de extremități a și b , închis la stânga și deschis la dreapta	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Interval de extremități a și b , deschis la stânga și închis la dreapta	

Observații

1. Definiția poate fi extinsă și pentru cazul când $a = b$. Obținem:

$$[a, a] = \{a\}, (a, a) = [a, a) = (a, a] = \emptyset.$$

Acest tip de intervale se mai numesc și *intervale degenerate*.

2. Intervalele de forma $[a, b]$ și $(a, b]$ se numesc *intervale semideschise*.

3. Fiecărui interval mărginit îi corespunde un segment pe axa reală.

- Notăm cu A punctul de abscisă a și cu B punctul de abscisă b , unde $a < b$.
- Intervalului $[a, b]$ îi corespunde segmentul închis AB , care își conține capetele.
- Intervalului (a, b) îi corespunde segmentul deschis AB , care nu-și conține capetele.
- Intervalului $[a, b)$ îi corespunde segmentul AB , care își conține doar capătul din stânga.
- Intervalului $(a, b]$ îi corespunde segmentul AB , care își conține doar capătul din dreapta.

**Intervale nemărginite****ACTIVITĂȚI PREGĂTITOARE**

Să considerăm mai întâi două exemple din viața cotidiană care conduc la noțiunea de interval nemărginit.

- În meteorologie, o zi caniculară se definește ca fiind ziua în care temperatura la umbră depășește 35°C , fără a exista un prag maxim impus!

În acest caz, spunem că temperatura T ia valori mai mari sau egale cu 35°C , adică $T \geq 35^\circ\text{C}$.

- În mod asemănător, pentru zilele geroase, temperatura T verifică condiția $T \leq -10^\circ\text{C}$, fără a exista un prag minim impus!

NOȚIUNI TEORETICE

Pentru scrierea intervalelor nemărginite avem nevoie de două simboluri matematice $-\infty$ și $+\infty$. Semnificația acestor simboluri este precizată prin definițiile intervalelor nemărginite din tabelul următor:

Mulțimea	Notăția	Denumirea	Reprezentarea geometrică
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	Interval închis la stânga, nemărginit la dreapta	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	Interval deschis la stânga, nemărginit la dreapta	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	Interval închis la dreapta, nemărginit la stânga	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	Interval deschis la dreapta, nemărginit la stânga	

**ATENȚIE!**

$+\infty$ și $-\infty$ nu sunt numere, ci simboluri matematice.

Observații

1. Uneori, semnul din fața lui $+\infty$ este omis. *De exemplu*, în loc de $(0, +\infty)$ se poate scrie $(0, \infty)$.
2. Mulțimea numerelor reale poate fi scrisă sub formă de interval:
 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
3. Fiecărui interval nemărginit îi corespunde o semidreaptă pe axa reală.



Intervalele de forma $[a, +\infty)$ și $(-\infty, a]$ le corespund semidrepte închise, adică semidrepte care își conțin originea. Intervalele de forma $(a, +\infty)$ și $(-\infty, a)$ le corespund semidrepte deschise, adică semidrepte care nu-și conțin originea.

⇒ Reprezentarea unor intervale folosind aproximarea numerelor reale

- Dacă $I = (\sqrt{2}, \sqrt{5})$, atunci pentru reprezentarea lui I pe axa reală folosim aproximări raționale pentru capetele $\sqrt{2}$ și $\sqrt{5}$. Astfel, pentru $\sqrt{2}$ putem folosi aproximarea prin lipsă $\sqrt{2} \simeq 1,4$, în timp ce pentru $\sqrt{5}$ folosim aproximarea prin adaos $\sqrt{5} \simeq 2,3$. Atunci reprezentarea lui I este

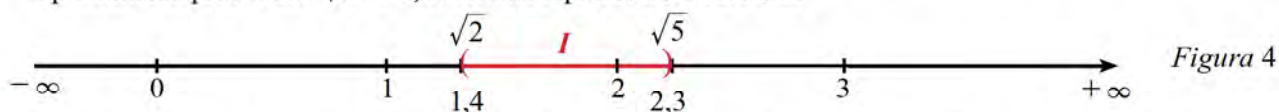


Figura 4

- Dacă $I = (\sqrt{3}, \infty)$, atunci aproximând pe $\sqrt{3}$ prin lipsă cu valoarea $\sqrt{3} \simeq 1,7$ reprezentarea lui I este



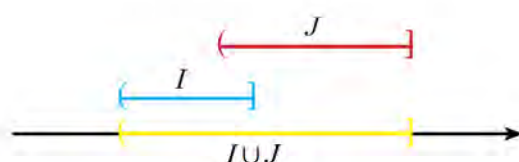
Figura 5

⇒ Operații cu intervale

Cu intervalele, fiind reprezentări ale unor mulțimi, se pot efectua operațiile cunoscute: *reuniunea* și *intersecția*. Astfel, dacă I și J sunt două intervale, avem:

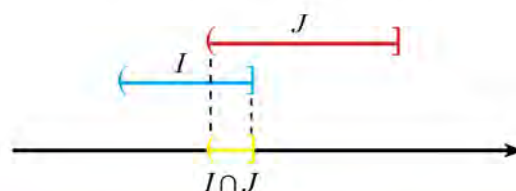
- **Reuniunea** intervalelor:

$$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ sau } x \in J\};$$



- **Intersecția** intervalelor:

$$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ și } x \in J\}.$$



Probleme rezolvate

- 1 Folosind reprezentarea pe axă, scrie sub formă mai simplă:

a) $(0, 5) \cup (3, 7)$; b) $(0, 5) \cap (3, 7)$.

Soluție

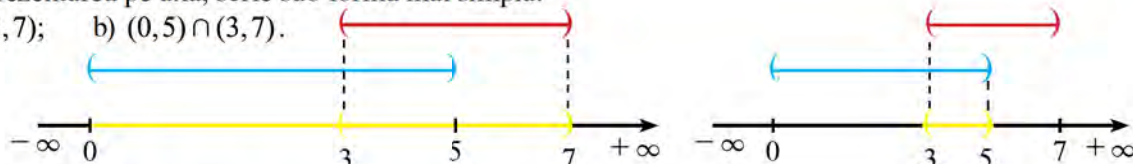


Figura 6

a) $(0, 5) \cup (3, 7) = (0, 7)$; b) $(0, 5) \cap (3, 7) = (3, 5)$.

- 2 Scrie sub formă mai simplă:

a) $(-\infty, 4] \cup [2, \infty)$; b) $(-\infty, 4] \cap [2, \infty)$.

Soluție

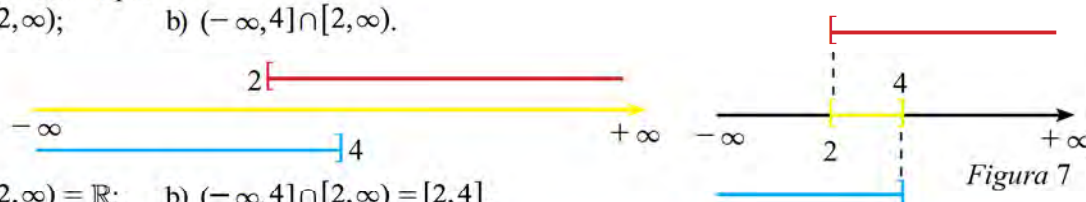
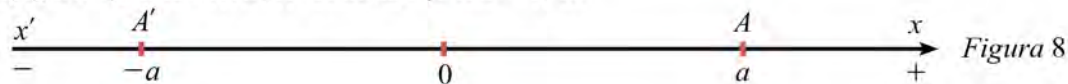


Figura 7

a) $(-\infty, 4] \cup [2, \infty) = \mathbb{R}$; b) $(-\infty, 4] \cap [2, \infty) = [2, 4]$.

**Caracterizarea unor intervale cu ajutorul modulului**

Fie a un număr real, $a > 0$. Reprezentăm pe axa reală punctele $A(a)$ și $A'(-a)$. Punctele sunt simetrice față de origine (vezi figura 8), adică A, O, A' coliniare și $AO = A'O$.



- Pentru punctele A și A' , distanța față de originea axei este egală cu a .
- Pentru punctele segmentului deschis AA' , distanța față de origine este mai mică (strict) decât a .
- Pentru punctele semidreptelor deschise Ax și $A'x'$, distanța față de origine este mai mare (strict) decât a .

Ținând seama că distanța de la origine la un punct de abscisă x este egală cu $|x|$, obținem proprietăți ale modului, utile în rezolvarea unor ecuații sau inecuații care conțin module.

REȚINE!

Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $a > 0$, avem:

$$|x| = |-x|; |x| = 0 \text{ echivalent cu } x = 0;$$

$$|x| = a \text{ echivalent cu } x \in \{-a, a\};$$

$$|x| \leq a \text{ echivalent cu } x \in [-a, a];$$

$$|x| < a \text{ echivalent cu } x \in (-a, a);$$

$$|x| \geq a \text{ echivalent cu } x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty);$$

$$|x| > a \text{ echivalent cu } x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty).$$

**Probleme rezolvate**

- 1** Determină mulțimile: a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x-3| = 5\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x-3| \leq 5\}$;
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x-3| \geq 5\}$; d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x-3| \leq -1\}$.

Soluție a) $|2x-3| = 5$ echivalent cu $2x-3 \in \{-5, 5\}$ echivalent cu $x = 4$ sau $x = -1$. Rezultă $A = \{-1, 4\}$.

b) $|2x-3| \leq 5$ echivalent cu $2x-3 \in [-5, 5]$, de unde $-5 \leq 2x-3 \leq 5$, deci $-2 \leq 2x \leq 8$ echivalent cu $-1 \leq x \leq 4$. Rezultă $B = [-1, 4]$. c) $|2x-3| \geq 5$ echivalent cu $2x-3 \in (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$, de unde $2x-3 \in (-\infty, -5]$ sau $2x-3 \in [5, \infty)$. $2x-3 \in (-\infty, -5]$ echivalent cu $2x-3 \leq -5$, de unde $x \leq -1$ rezultă $x \in (-\infty, -1]$; $2x-3 \in [5, \infty)$ echivalent cu $2x-3 \geq 5$, de unde $x \geq 4$, deci $x \in [4, \infty)$.

Rezultă $C = (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$. d) Deoarece $|2x-3| \geq 0$, pentru orice număr real x , avem $D = \emptyset$.

- 2** Demonstrează că, dacă $x, y \in (8, 10)$, atunci $(x-9)(y-9) \in (-1, 1)$.

Soluție Cum $x \in (8, 10)$, rezultă $8 < x < 10$, deci $-1 < x-9 < 1$ avem $|x-9| < 1$;

Cum $y \in (8, 10)$, rezultă $8 < y < 10$, deci $-1 < y-9 < 1$ avem $|y-9| < 1$.

Înmulțind membru cu membru inegalitățile $|x-9| < 1$ și $|y-9| < 1$ (reamintim că două inegalități cu termeni pozitivi se pot înmulți membru cu membru), obținem $|(x-9)(y-9)| < 1$, adică $(x-9)(y-9) \in (-1, 1)$.

- 3** Dacă x și y sunt numere reale astfel încât $|x-1| < 4$ și $|y+2| < 5$, demonstrează că $x+y \in (-10, 8)$.

Soluție Din $|x-1| < 4$ rezultă $-4 < x-1 < 4$, de unde $-3 < x < 5$. Din $|y+2| < 5$ rezultă $-5 < y+2 < 5$, de unde $-7 < y < 3$. Prin adunare, membru cu membru, $-10 < x+y < 8$, deci $x+y \in (-10, 8)$.



4 Se consideră mulțimile $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |3x - 4| < 5\}$ și $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq (-4)^{1013} : (-2)^{2025}\}$.

a) Arată că $C \subset D$.

b) Găsește numerele întregi care se află în mulțimea D , dar nu se află în mulțimea C .

Soluție a) $|3x - 4| < 5 \Leftrightarrow -5 < 3x - 4 < 5 \mid +4 \Leftrightarrow -1 < 3x < 9 \mid : 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 3$. Cum $x \in \mathbb{Z}$ rezultă:
 $C = \{0; 1; 2\}$. $|x| \leq (-4)^{1013} : (-2)^{2025} \Leftrightarrow |x| \leq 2^{2026} : 2^{2025} \Leftrightarrow |x| \leq 2$. Deoarece $x \in \mathbb{R}$ obținem: $D = [-2; 2]$.
 Cum $0 \in [-2; 2]$, $1 \in [-2; 2]$ și $2 \in [-2; 2]$, rezultă că $C \subset D$.

b) $D \cap \mathbb{Z} = [-2; 2] \cap \mathbb{Z} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Cum $C = \{0; 1; 2\}$, rezultă că numerele întregi care se află în mulțimea D , dar nu se află în mulțimea C sunt -2 și -1 .

5 Se consideră mulțimile $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9}\right\}$ și $Y = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < \frac{x-3}{4} \leq \frac{5}{6}\right\}$.

a) Scribe mulțimile X și Y sub formă de intervale.

b) Determină $(X \cup Y) \cap \mathbb{Z}$.

Soluție a) $\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} = \frac{5-3}{3 \cdot 5} + \frac{7-5}{5 \cdot 7} + \frac{9-7}{7 \cdot 9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

Rezultă $|x| < \frac{2}{9}$ și cum $x \in \mathbb{R}$, obținem că $X = \left(-\frac{2}{9}; \frac{2}{9}\right)$. Pentru a scrie mulțimea Y sub forma unui interval, rezolvăm dubla inecuație în mulțimea numerelor reale. Avem succesiv:

$$\frac{1}{2} < \frac{x-3}{4} \leq \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{12} < \frac{3x-9}{12} \leq \frac{10}{12} \mid \cdot 12 \Leftrightarrow 6 < 3x-9 \leq 10 \mid +9 \Leftrightarrow 15 < 3x \leq 19 \mid : 3 \Leftrightarrow 5 < x \leq \frac{19}{3}.$$

Cum $x \in \mathbb{R}$, rezultă $Y = \left(5; \frac{19}{3}\right]$.

b) $X \cup Y = \left(-\frac{2}{9}; \frac{2}{9}\right) \cup \left(5; \frac{19}{3}\right]$, deci $(X \cup Y) \cap \mathbb{Z} = \{0; 6\}$.

6 a) Dacă a, b, m și n sunt numere reale și $a \leq m < n < b$, demonstrează că $n - m < b - a$.

b) Arată că oricare ar fi 6 numere reale diferite din intervalul $[10; 15)$ există două dintre ele a căror diferență este mai mică decât 1.

Soluție a) Pe axa numerelor considerăm punctele $A(a), B(b), M(m), N(n)$.

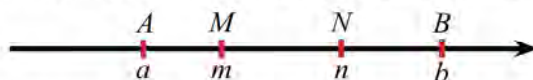


Figura 9

$$MN = n - m, AB = b - a \text{ și } MN < AB \Leftrightarrow n - m < b - a.$$

b) $[10; 15) = [10; 11) \cup [11; 12) \cup [12; 13) \cup [13; 14) \cup [14; 15)$.

Cum $[10; 15)$ este reuniunea a cinci intervale de forma $[a; a+1)$, cu $a \in \mathbb{N}$, și noi avem șase numere, cel puțin două dintre ele se află în același interval. Conform punctului a), diferența dintre cele două numere este mai mică decât $a+1 - a = 1$.



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Stabilește valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:
 a) $0 \in [-1, 1)$; b) $2 \in [0, 2)$;
 c) $\frac{11}{3} \in [3, 4]$; d) $\frac{1}{3} \notin (0, 3; 0, 4)$;
 e) $\sqrt{2} \in [1, 4; 1, 42)$; f) $-\sqrt{3} \in (-2; -1]$;
 g) $-2, (5) \in (-2, 6; +\infty)$.
- 2 Scrie, sub formă de intervale, mulțimile:
 a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$;
 b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$;
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$;
 d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$;
 e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$;
 f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$;
 g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{2}\}$;
 h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{3}\}$;
 i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} > x > -\frac{5}{3}\}$;
 j) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \geq -1\}$.
- 3 Scrie, sub formă mai simplă, mulțimile:
 a) $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$; b) $(-\infty, 3) \cup [3, \infty)$;
 c) $[0, 4] \cup (4, \infty)$; d) $[2, 10] \cap (2, 10)$;
 e) $[1, 4] \cap [4, 6]$; f) $(1, 4) \cap (4, 6)$.
- 4 Scrie, cu ajutorul intervalelor, mulțimile:
 a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$;
 b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 4\}$;
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$;
 d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x - 1 \leq 2\}$;
 e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x + 2 \leq 4\}$;
 f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq 3x\}$;
 g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq 3x + 3 < 9\}$.
- 5 Fie numărul $a = \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{50}$.
 Demonstrează că $a \in (0, 62; 1, 55)$.
- 6 Calculează suma numerelor întregi din intervalul $(-4\sqrt{5}; 3\sqrt{7})$.
- 7 Reprezintă pe axă intervalele: a) $[-1; 2]$;
 b) $(1; 4]$; c) $(-\infty, -2]$; d) $[-3; 4, 5)$;
 e) $[\sqrt{2}, \infty)$; f) $[-1, 5; 0, (3))$; g) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
- 8 Dacă $I = [-5, 5; 4]$; $J = (-5; 3]$; $K = [-6, +\infty)$;
 $L = (-7, 5; 5)$, care dintre următoarele propoziții sunt adevărate?
 a) $I \subset J$; b) $I \subset K$; c) $J \subset K$; d) $J \subset L$; e) $K \supset L$.
- 9 Precizează câte numere întregi conține fiecare dintre intervalele:
 a) $(-5; 5)$; b) $[-7; 7]$; c) $(-4; 4]$;
 d) $[7; 8)$; e) $(9; 10)$; f) $(-3; 12]$;
 g) $[-4; 3\frac{1}{2}]$; h) $[3, 5; 4, 5)$; i) $(-n; n)$; $n \in \mathbb{N}^*$.
- 10 Folosind reprezentarea pe axă, scrie mai simplu următoarele mulțimi:
 a) $[2, 5] \cup [3, 7]$; b) $(-3, 0) \cup [0, 7]$;
 c) $[0, 4] \cup (1, \infty)$; d) $[1, 7] \cap [2, 10]$;
 e) $(-\infty, 0) \cap (-2, 5)$; f) $(2, 9) \cap [2, 9]$;
 g) $[0, 4] \cup [1, 2]$; h) $(-3, 2) \cup [0, 5]$;
 i) $[1, 6] \cup (3, \infty)$; j) $[10, 11] \cap [2, 10]$;
 k) $(-\infty, 2) \cap (-2, 1)$; l) $(2, 3) \cap [2, 3]$.
- 11 Scrie, cu ajutorul intervalelor, următoarele mulțimi și reprezintă-le pe axa numerelor reale:
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$;
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 4\}$;
 $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| > 3\}$;
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}$;
 $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -x\}$;
 $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| < 3\}$;
 $G = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(x-1)^2} \geq 1\}$.



12 Precizează care dintre mulțimile următoare reprezintă intervale:

- a) $[0, 2) \cap [1, 3]$; b) $[0, 1) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$;
c) $[-2, 0] \cap \mathbb{Q}$.

13 Dacă $I_1 = [-2, 4)$, $I_2 = (1, 3]$, efectuează:

- a) $I_1 \cup I_2$; b) $I_1 \cap I_2$;
c) $I_2 \cap \mathbb{N}$; d) $I_1 \cap \mathbb{Z}$.

14 Determină mulțimile:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 0\}$;
b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = \frac{11}{4}\right\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| = -2\}$;

15 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a < b$, arată că:

$$\left(\frac{5a+b}{6}, \frac{a+5b}{6}\right) \subset (a, b).$$

16 Fie $I = (0, \infty)$ și $a, b \in I$, $a < b$. Verifică dacă:

- a) $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$; b) $\sqrt{ab} \in (a, b)$;
c) $\frac{2ab}{a+b} \in (a, b)$; d) $\frac{a+b\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \in (a, b)$.

17 Se consideră mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2x-3} \leq 7\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{5x-3} < 7\}.$$

- a) Scrie mulțimile A și B sub formă de interval.
b) Determină: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap \mathbb{N}$; $B \cap \mathbb{Z}$.

18 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, demonstrează că:

- a) $\frac{2a+b}{3} \in (a, b)$; b) $3a+5b \in (8a, 8b)$.

19 Pentru a nu uita parola de la adresa de e-mail, Bogdan a ales-o în felul următor:

- a) este formată din șapte cifre scrise în ordine descrescătoare;
b) fiecare cifră este element al mulțimii

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 4\}.$$

Care este parola lui Bogdan?

20 O persoană dorește să cumpere un teren dreptunghiular cu lățimea de 20 m, cu cel mult 15 000 euro. Prețul terenului este de 10 euro/m² și proprietarul nu vinde mai puțin de 500 m². În ce interval poate lua valori lungimea terenului pe care vrea să îl cumpere persoana respectivă?

21 Pe cele două laturi ale unei alei, lungă de 340 m se plantează brazi. Intervalul dintre doi brazi consecutivi variază între 8 m și 9 m. Determină în ce interval închis se află numărul de brazi plantați.

22 Determină:

- a) Cel mai mare număr întreg care se află în intervalul $(-1; 2)$;
b) Cel mai mic număr întreg care se află în intervalul $\left[-\frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right)$;
c) Cel mai mare număr întreg care nu se află în intervalul $(-2; \infty)$;
d) Cel mai mic număr întreg care nu se află în intervalul $(-\infty; \sqrt{10})$.

23 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| \leq 7\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x-4| < 2\}$.

Determină mulțimile:

$$A \cap B; \quad A \cup B; \quad A \cap \mathbb{Z}; \quad B \cap \mathbb{N}.$$

24 Se consideră mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 \leq 3x+4 \leq x+10\}.$$

- a) Scrie mulțimea A sub forma unui interval.
b) Determină cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{Z}$.

25 a) Dacă $a \in (-8; 2)$, arată că numărul $|a+8| + |a-2|$ este natural.

b) Dacă $b \in [1; 3]$ și $c \in [-2; 4]$, arată că numărul $|b+c+1| + |7-b-c|$ este natural.

26 Fie a și b numere reale pozitive, astfel încât $a+b=4$. Demonstrează că

$$\sqrt{a^2+(4-b)^2} + \sqrt{b^2+(4-a)^2} = 4\sqrt{2}.$$

27 Demonstrează că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x-7y+3=0$ și $x \in [-3; 4]$, atunci:

- a) $y \in [0, 1]$;
b) $\sqrt{(x+3)^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = 5\sqrt{2}$.

28 Demonstrează că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a+b+c=5$, atunci:

$$a) \sqrt{8a^2+(b+c-5)^2} + \sqrt{8b^2+(c+a-5)^2} + \sqrt{8c^2+(a+b-5)^2} \geq 15.$$

b) În ce condiții are loc egalitatea în relația de la punctul a)?

LECTIA 3

Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$ Noțiuni recapitulative

În clasa a VII-a ați învățat cum se compară două numere reale. În tabelul următor (în care, cu a, b, c, d , am notat numere reale), sistematizăm proprietățile relației „ $\leq$ ”.

1)	$a \leq a$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.	Relația „ $\leq$ ” este reflexivă.
2)	Dacă $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.	Relația „ $\leq$ ” este antisimetrică.
3)	Dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$.	Relația „ $\leq$ ” este tranzitivă.
4)	Dacă $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$ și reciproc. Dacă $a \leq b$, atunci $a - c \leq b - c$ și reciproc.	Dacă adunăm sau scădem în ambii membri ai unei inegalități același număr, obținem o inegalitate echivalentă cu cea dată, păstrând semnul inegalității.
5)	Fie $c > 0$. Avem: • dacă $a \leq b$, atunci $ac \leq bc$ și reciproc; • dacă $a \leq b$, atunci $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ și reciproc.	Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inegalități cu același număr strict pozitiv, obținem o inegalitate echivalentă cu cea dată, păstrând semnul inegalității.
6)	Fie $c < 0$. Avem: • dacă $a \leq b$, atunci $ac \geq bc$ și reciproc; • dacă $a \leq b$, atunci $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ și reciproc.	Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inegalități cu același număr strict negativ, obținem o inegalitate echivalentă cu cea dată, schimbând semnul „ $\leq$ ” cu semnul „ $\geq$ ”.

Deoarece $a \leq b$ este echivalent cu $b \geq a$, proprietățile relației „ $\geq$ ” se deduc imediat din cele de mai sus.

Relațiile „ $\leq$ ” și „ $\geq$ ” sunt relații de inegalitate nestrictă. Relațiile „ $<$ ” și „ $>$ ” sunt relații de inegalitate strictă.

Avem $a < b$ dacă și numai dacă $a \leq b$ și $a \neq b$; de asemenea, $a < b$ dacă și numai dacă $b > a$. Deducem că relațiile de inegalitate strictă au proprietăți asemănătoare proprietăților 3), 4), 5), 6).

NOȚIUNI TEORETICE



Rezolvarea în mulțimea numerelor reale a inecuațiilor de forma $ax + b > 0$ ($<, \leq, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

Definiție

Relațiile de tipul $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, unde a, b sunt numere reale date, se numesc *inecuații* cu necunoscuta x .

- Pentru rezolvarea unei inecuații este necesar să știm mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ în care se poate afla necunoscuta x .
- A rezolva o inecuație de forma celor din definiție înseamnă a determina toate valorile necunoscutei x din D care verifică inegalitatea dată de inecuație, (înlocuite în inecuație conduc la propoziții adevărate). Aceste valori ale necunoscutei x din D poartă denumirea de soluții ale inecuației date.
- Notăm cu S mulțimea soluțiilor din D ale inecuației.

Definiție

Două inecuații cu aceeași mulțime S a soluțiilor se numesc *inecuații echivalente*.

**ATENȚIE!**

Două inecuații echivalente se obțin una din cealaltă prin aplicarea proprietăților relației de inegalitate în mulțimea numerelor reale. Simbolul matematic folosit în acest caz între inegalități este $\Leftrightarrow$, care se citește *echivalent*.

Rezolvarea se realizează scriind inecuația succesiv sub forme echivalente (inecuații care au aceeași mulțime a soluțiilor). Din tabelul cu proprietăți ale relației $<, \leq, >, \geq$ rezultă:

- Dacă într-o inecuație trecem un termen dintr-un membru în celălalt schimbându-i semnul, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.
- Dacă într-o inecuație înmulțim sau împărțim ambii membri cu același număr strict pozitiv, se obține o inecuație echivalentă cu cea dată.
- Dacă într-o inecuație înmulțim sau împărțim ambii membri cu același număr strict negativ schimbând semnul inegalității (adică se schimbă „ $<$ ” în „ $>$ ”, „ $>$ ” în „ $<$ ”, „ $\leq$ ” în „ $\geq$ ”, „ $\geq$ ” în „ $\leq$ ”), se obține o inecuație echivalentă cu cea dată.

Exemple

1. $2x + 3 > 1 \Leftrightarrow 2x > 1 - 3 \Leftrightarrow 2x > -2.$

2. $-5x > 10 \Leftrightarrow -x > 2.$

3. $-5x > 10 \Leftrightarrow x < -2.$

4. $\frac{1}{2}x > 3 \Leftrightarrow x > 6.$

5. $-\frac{1}{2}x > 3 \Leftrightarrow x < -6.$

Algoritmul rezolvării unei inecuații de forma $ax + b > 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Pentru rezolvarea unei inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq, <, \leq$) este necesar să cunoaștem mulțimea D , în care se poate afla necunoscuta x .

Notăm cu S , mulțimea soluțiilor din D ale inecuației, adică mulțimea valorilor lui $x \in D$, care înlocuite în inecuație conduc la propoziții adevărate.

Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a inecuației $ax + b > 0$ constă în următoarele etape:

Pasul I

- Adunăm în ambii membri $-b$ și obținem inegalitatea echivalentă $ax > -b$.

Pasul II

- Dacă $a > 0$, împărțind prin a , obținem $x > -\frac{b}{a}$, deci $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\right\} = \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$.
- Dacă $a < 0$, împărțind prin a , obținem $x < -\frac{b}{a}$, deci $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\right\} = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.
- Dacă $a = 0$ și $b > 0$, propoziția $0 \cdot x + b > 0$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $S = \mathbb{R}$.
- Dacă $a = 0$ și $b < 0$, propoziția $0 \cdot x + b > 0$ este falsă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $S = \emptyset$.

Observații

1. Pentru a determina mulțimea $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -\frac{b}{a}\right\}$ sau mulțimea $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x < -\frac{b}{a}\right\}$ este util să încadrăm numărul $-\frac{b}{a}$ între doi întregi consecutivi și să folosim reprezentarea pe axă.
2. Inecuațiile de forma $ax + b \geq 0$ ($<, \leq$) se rezolvă în mod asemănător.
3. În cazul în care inecuația se cere a fi rezolvată în D , pentru determinarea soluției finale vom intersecta soluția obținută ca în algoritm cu mulțimea D .



Ținând cont de semnul unei fracții, pentru a rezolva o inecuație de forma $\frac{a}{bx+c} < 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ deosebim două cazuri.

Cazul I

- Dacă $a > 0$, atunci inecuația este echivalentă (are aceleași soluții) cu inecuația $bx + c < 0$, a cărei rezolvare a fost studiată anterior.

Cazul II

- Dacă $a < 0$, atunci inecuația este echivalentă cu inecuația $bx + c > 0$, inecuația studiată anterior.

Observații

1. Inegalitatea de forma $\frac{a}{bx+c} \leq 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $c \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu inecuația $\frac{a}{bx+c} < 0$.

2. În mod analog se rezolvă inecuațiile de forma $\frac{a}{bx+c} > 0$ și $\frac{a}{bx+c} \geq 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $c \in \mathbb{R}$.

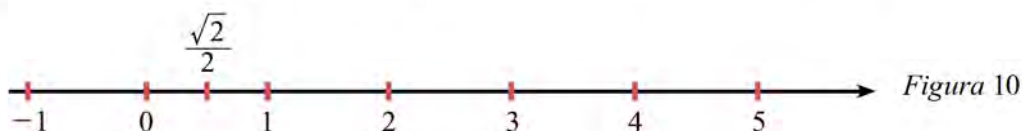
**Probleme rezolvate**

1 Rezolvă în $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $-2x + \sqrt{2} < 0$; b) $\frac{x}{\sqrt{3}} - x\sqrt{3} > 4$.

Soluție a) $-2x + \sqrt{2} < 0$ echivalent cu $-2x < -\sqrt{2}$ echivalent cu $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cum $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, obținem $S = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$ (vezi figura 10).



În mulțimea $\mathbb{R}$ soluția inecuației este: $S = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty \right)$.

b) $\frac{x}{\sqrt{3}} - x\sqrt{3} > 4$ echivalent cu $x - 3x > 4\sqrt{3}$ echivalent cu $-2x > 4\sqrt{3}$ echivalent cu $x < -2\sqrt{3}$.

Calculând o valoare aproximativă a lui $-2\sqrt{3}$, arătăm că $-4 < -2\sqrt{3} < -3$, deci

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -2\sqrt{3}\} = \{-4, -5, -6, \dots\}.$$

În mulțimea $\mathbb{R}$ soluția inecuației este $S = (-\infty, -2\sqrt{3})$.

2 Fic inecuația $ax + b \leq 0$.

a) Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația pentru $a = -\frac{1}{2}$ și $b = 1$;

b) Determină $a \in \mathbb{R}$, știind că $b = -2$, iar mulțimea soluțiilor inecuației este $\mathbb{R}$.

Soluție a) $-\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$, echivalent cu $-\frac{1}{2}x \leq -1$, echivalent cu $x \geq 2$. Rezultă $S = [2, \infty)$.

b) Dacă $a > 0$, atunci $ax - 2 \leq 0$, echivalent cu $ax \leq 2$, echivalent cu $x \leq \frac{2}{a}$, de unde $S = \left(-\infty, \frac{2}{a}\right] \neq \mathbb{R}$.

Prin urmare, $a \leq 0$. Dacă $a < 0$, atunci $ax - 2 \leq 0$, echivalent cu $ax \leq 2$, echivalent cu $x \geq \frac{2}{a}$. Deci $S = \left[\frac{2}{a}, +\infty\right) \neq \mathbb{R}$. În consecință $a \notin (-\infty, 0)$. Deci $a = 0$.

Într-adevăr, inecuația $0 \cdot x - 2 \leq 0$ are ca mulțime a soluțiilor $S = \mathbb{R}$.

3 Determină mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $\left|\frac{1-2x}{3}\right| \leq \frac{1}{2}$.

Soluție Folosim o proprietate a modulului: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1-2x}{3} \leq \frac{1}{2}$. Înmulțim relația cu 6 și obținem:

$-3 \leq 2 - 4x \leq 3$. Adunăm -2 și obținem: $-5 \leq -4x \leq 1$. Împărțim prin -4 avem: $\frac{5}{4} \geq x \geq -\frac{1}{4}$.

Ultima relație este echivalentă cu $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$, deci $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

4 Rezolvă în $\mathbb{Z}$, respectiv $\mathbb{R}$, inecuațiile:

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}x+1} < 0$; b) $\frac{5}{x-\sqrt{3}} \leq 0$; c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-\sqrt{5}x+1} > 0$; d) $\frac{\pi-3}{-x+\sqrt{3}} \geq 0$.

Soluție a) Cum $\sqrt{2}-1 > 0$, inecuația devine $\sqrt{3}x+1 < 0$, de unde $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, (1).

Deoarece $\frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$, rezultă $0 > -\frac{\sqrt{3}}{3} > -1$ și atunci soluția în $\mathbb{Z}$ este $S = \{\dots, -3, -2, -1\}$.

În $\mathbb{R}$, ținând cont de (1), soluția este $S = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

b) Deoarece $5 > 0$, inecuația este echivalentă cu $x - \sqrt{3} < 0$, adică $x < \sqrt{3}$, (2).

Deoarece $1 < \sqrt{3} < 2$, soluția în $\mathbb{Z}$ a inecuației este $S = \{\dots, -1, 0, 1\}$. În $\mathbb{R}$ inecuația (2) are soluția $S = (-\infty, \sqrt{3})$.

c) Întrucât $\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0$, inecuația este echivalentă cu $-\sqrt{5}x+1 < 0$, adică $-\sqrt{5}x < -1$, de unde obținem $x > \frac{\sqrt{5}}{5}$, (3). Deoarece $0 < \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$, soluția în $\mathbb{Z}$ a inecuației este $S = \{1, 2, 3, \dots\}$.

În $\mathbb{R}$ inecuația (3) are soluția $S = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \infty\right)$.

d) Avem $\pi-3 > 0$, atunci $-x+\sqrt{3} > 0$, de unde $-x > -\sqrt{3}$, adică $x < \sqrt{3}$, (4).

Cum $1 < \sqrt{3} < 2$, obținem în $\mathbb{Z}$ soluția inecuației $S = \{\dots, -1, 0, 1\}$.

Inecuația (4) are în $\mathbb{R}$ soluția $S = (-\infty, \sqrt{3})$.

5 Considerăm mulțimea $M = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3x-4}{5} \leq \frac{4-3x}{10}\right\}$. Află cel mai mare număr întreg care se află în mulțimea M și cel mai mic număr întreg care nu se află în mulțimea M .

Soluție Inecuația $\frac{3x-4}{5} \leq \frac{4-3x}{10}$ se scrie echivalent $\frac{6x-8}{10} \leq \frac{4-3x}{10}$. Înmulțind ambii membri cu 10, obținem $6x-8 \leq 4-3x$ de unde găsim că $x \leq \frac{4}{3}$.

Rezultă $M = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$. Cel mai mare număr întreg care se află în mulțimea M este 1, iar cel mai mic număr întreg care nu se află în mulțimea M este 2.


FIXARE
EXERSARE
CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1** Fie $A = \{-3; 5; 2\,009; -14; 0; 25; -2\,025; 49\}$.
Precizează care dintre elementele mulțimii A sunt soluții ale inecuațiilor:

- a) $7x < 21$; b) $3x + 5 < 14$;
c) $-2x + 3 \geq \frac{11}{3}$; d) $-\frac{3}{2}x + 1 \leq 7,5$;
e) $\frac{x}{3} + 4 > 1,1(6)$; f) $2x < \sqrt{2}$.

- 2** Reprezintă pe axa numerelor mulțimea soluțiilor reale pentru fiecare dintre inecuațiile:

- a) $x \leq -4$; b) $2x \leq -18$;
c) $-2x \leq 6$; d) $4 - 2x \leq 6$.

- 3** Rezolvă în $\mathbb{N}$ inecuațiile:

- a) $3x - 12 \leq 2x + 3$; b) $3x + 6 > 6x - 2$;
c) $-5(x - 2) \leq -4(x - 7) + 1$;
d) $3x - \frac{x}{2} \leq \frac{1-x}{-3}$.

- 4** Rezolvă în $\mathbb{Z}$ inecuațiile:

- a) $2x < 4$;
b) $-4x \geq 8$; c) $x + 3 \leq 10$; d) $2x + 2 \geq \frac{5}{3}$;
e) $-2x - \frac{3}{4} \geq x - \frac{1}{2}$; f) $4x + 2 \geq -x + 7$.

- 5** Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $2x + 9 \leq 5x + 4$; b) $3x + 5 > 6x + 1$;
c) $3(x + 4) - 2(x + 1) \leq 2(x - 5) - 1$;
d) $|x - 3| \leq 4$; e) $\sqrt{3}x - 3 \leq 3x - \sqrt{3}$;
f) $(\sqrt{2} - 2)x \geq \sqrt{2} - 2$; g) $\frac{7x-4}{-2} > 2x - 7$.

- 6** Determină mulțimea valorilor reale ale lui x cu proprietatea: a) $\frac{2x-3}{5} \in (-\infty, 7)$;

- b) $\frac{1-10x}{3} \in [-13, \infty)$; c) $\frac{4-9x}{2} \in [-7, 2]$.

- 7** Asociază fiecărei cifre corespunzătoare unui enunț din coloana **A**, litera care indică răspunsul corect din coloana **B**.

A

1. Soluția în $\mathbb{Z}$ a inecuației $|x| < 1$ este ...

2. Soluția în $\mathbb{R}$ a inecuației $\frac{x}{2} - \frac{1-x}{4} < 8$ este ...

3. Soluția în $\mathbb{R}$ a inecuației $\sqrt{3} \cdot x + 8 \leq 2x + 4\sqrt{3}$ este ...

B

- a. $(-\infty; 11)$. b. $[4; \infty)$.
c. $\{0\}$. d. $\emptyset$.

- 8** Pentru fiecare dintre inecuațiile de mai jos precizează trei numere întregi, soluții ale inecuației:

- a) $7x - 1 \geq 0$; b) $2x + 1 \leq -5$;
c) $-\frac{7}{3}x + 2 \geq 4,5$; d) $\frac{x}{2} + 3\frac{1}{4} \leq -5,25$.

- 9** Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $\frac{x+1}{3} < 0$;
b) $\frac{2x-1}{5} \geq 0$; c) $\frac{3x-7}{9} \leq 0$; d) $\frac{x-3}{5} \leq 2$;
e) $\frac{2x-3}{4} + \frac{x-1}{2} \leq 0$; f) $\frac{4x+1}{5} \geq \frac{2x-1}{3}$;
g) $\frac{5x+3}{4} \geq \frac{10x+1}{8}$; h) $\frac{3x-4}{7} < \frac{6x-9}{14}$;
i) $\frac{x+1}{3} + \frac{7x-1}{5} > \frac{2x-1}{10} + \frac{5}{6}$; j) $\frac{3x-14}{2\,025} > 0$;
k) $\frac{x+1}{3} + \frac{7x-3}{12} > \frac{1}{2}$; l) $\frac{6x-1}{2} + \frac{4x+1}{3} \leq \frac{7}{6}$.

- 10** Rezolvă în $\mathbb{Z}$ și apoi în $\mathbb{N}$ inecuațiile:

- a) $x < \sqrt{2}$; b) $-2x > -\sqrt{7}$;
c) $x + 1 \leq \sqrt{15}$; d) $x\sqrt{2} \geq 4$.

- 11** Determină:

- a) cel mai mic număr întreg care verifică inecuația

$$\frac{x}{-3} < \frac{x+1}{2};$$

- b) cel mai mare număr întreg care verifică inecuația

$$2(x+3) \leq \frac{x-10}{-2}.$$

- 12** Rezolvă în $\mathbb{Z}$ inecuațiile:

- a) $3x + 1 < 0$;
b) $2x - 7 \geq 0$; c) $-5x - 3 < 0$; d) $\frac{7}{3}x \leq 9$;
e) $\frac{x+5}{2} - \frac{2x-7}{6} \geq 0,1(6) \cdot x + \frac{1}{2}$.



13 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $5x - \frac{1}{4} \leq 0$; b) $\frac{15}{7}x - \frac{1}{12} \geq \frac{7}{4}$;
 c) $-2,5x + 3\frac{1}{2} \leq 7\frac{1}{3}$; d) $-0,6x + \frac{1}{3} \geq \frac{5}{6}$;
 e) $2x\sqrt{3} - \sqrt{147} > 0$; f) $3x\sqrt{5} \leq \sqrt{80}$;
 g) $x\sqrt{2} < 2$; h) $x\sqrt{3} > 12$.

14 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $\frac{2x+5}{2} < \frac{5x+7}{3}$; b) $\frac{-x+1}{3} > \frac{7x+8}{2} + 1$;
 c) $\frac{2x+5}{2} < \frac{5x}{3} + 1$; d) $\frac{5x-3}{2} < \frac{6x+9}{4} + 3$;
 e) $\frac{3x+2}{12} - 7 \leq \frac{2x+7}{2}$; f) $\frac{7x+12}{3} > 4x + 4\frac{1}{5}$;
 g) $\frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} \geq \frac{x+4}{6}$;
 h) $\frac{2x+5}{5} - \frac{3x+5}{3} < \frac{6x+11}{15}$;
 i) $\frac{7x+9}{6} > \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}$;
 j) $\frac{4x+7}{16} - \frac{x+6}{4} \leq \frac{x+5}{5}$;
 k) $\frac{3x-4}{2} - \frac{x+5}{8} > -\frac{2x+5}{4}$;
 l) $\frac{6x+9}{5} - \frac{2x+9}{4} \leq \frac{3x+12}{10}$.

15 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $x\sqrt{2} + 2 \leq 2x + \sqrt{2}$;
 b) $x\sqrt{3} - 2\sqrt{5} \geq x\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$;
 c) $(\sqrt{3} - 1)x - 3 \leq 2x(\sqrt{3} + 1) - 3\sqrt{3}$.

16 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $|2x - 1| \leq 5$; b) $\left| \frac{2x+1}{3} \right| < 1$;
 c) $\left| \frac{3x-1}{2} - 1 \right| \leq 6$; d) $\left| x - \frac{x-1}{2} \right| < 7$.

17 Fie $x \in \mathbb{R}$. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

- a) Dacă $x + 2 \in [-2, 1)$, atunci $x \in \dots$
 b) Dacă $x - 2 \in (-\infty, 3]$, atunci $x \in \dots$
 c) Dacă $-2x + 3 \in (2, +\infty)$, atunci $x \in \dots$

18 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $\frac{3}{x+2} > 0$; b) $\frac{-5}{-x+3} \geq 0$;
 c) $\frac{\sqrt{3}-\pi}{x\sqrt{2}+\pi} < 0$; d) $\frac{2-\sqrt{5}}{3x-2\sqrt{2}} \leq 0$.

19 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $\frac{3-\sqrt{5}}{3x\sqrt{5}-\sqrt{80}} \leq 0$; b) $\frac{2-\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-2} > 0$;
 c) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{x\sqrt{3}-12} < 0$; d) $\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-x\sqrt{5}} \geq 0$.

20 Determină elementele mulțimilor:

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 - x \geq -5\}$;
 b) $B = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{3-x}{-2} \leq 1\right\}$;
 c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x-1}{-3} < x\right\}$;
 d) $D = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{3-7x}{-2} \leq 1\right\}$;
 e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid -x\sqrt{2} \geq -2\}$;
 f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x > -5 \text{ și } |x| = -x\}$.

21 Fie inecuația $-2x + 3 \geq -7$. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

- a) Rezolvând în $\mathbb{N}^*$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 b) Rezolvând în $\mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 c) Cel mai mare număr întreg negativ care verifică inecuația este $x = \dots$

22 Fie inecuația $|x| \leq 3$. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

- a) Rezolvând în $\mathbb{N}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 b) Rezolvând în $\mathbb{Z}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 c) Rezolvând în $\mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$

23 Fie inecuația $|x + 3| \leq 1$. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

- a) Rezolvând în $\mathbb{Z}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 b) Rezolvând în $\mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 c) Rezolvând în $\mathbb{N}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$

24 Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

- a) Rezolvând în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{2}x \leq 2\sqrt{2}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 b) Rezolvând în $\mathbb{N}$ inecuația $\frac{3}{2}x - 1 \leq 2$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$
 c) Rezolvând în mulțimea numerelor întregi negative inecuația $2\sqrt{3} + x\sqrt{3} \geq -3\sqrt{3}$, mulțimea soluțiilor este $x \in \dots$

25 Rezolvă în $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $x + 7 < 10$; b) $-x + 2 > \frac{1}{2}$;
 c) $2x - 3 > 0$; d) $\frac{3}{2}x + 1\frac{1}{4} \geq 0$;
 e) $4,1x + 1,5 \leq 7,17$; f) $2x + 3 < 5x - 2$;



LECȚIA 4

Aplicații ale inecuațiilor în rezolvarea unor probleme practice

Etapele rezolvării unei probleme cu ajutorul inecuațiilor de forma $ax + b \geq 0$ sunt:

- Stabilirea necunoscutei și notarea acesteia cu o literă.
- Stabilirea legăturilor dintre datele cunoscute și necunoscute și formarea inecuației, stabilirea domeniului în care se rezolvă inecuația.
- Rezolvarea inecuației.
- Interpretarea rezultatului și stabilirea soluției.



Probleme rezolvate

- 1 Care este cel mai mare număr natural de patru cifre care dă restul 25 prin împărțire la 30?

Soluție Numărul căutat este de forma $30x + 25, x \in \mathbb{N}$ și este cel mai mare care verifică relația $30x + 25 < 10\,000$, deci rezolvarea problemei se reduce la determinarea celei mai mari soluții întregi a inecuației de mai sus. Obținem $30x < 9\,975$, adică $x < 332,5$. Cea mai mare soluție întreagă este 332, deci numărul căutat este $30 \cdot 332 + 25 = 9\,985$.

- 2 La împărțirea a două numere naturale nenule, câtul este mai mic decât împărțitorul cu 5 și mai mic decât restul de 4 ori. Ce valori poate lua deîmpărțitul?

Soluție Notăm câtul împărțirii cu x . Atunci, împărțitorul este $x + 5$, iar restul este $4x$. Exprimând faptul că restul este strict mai mic decât împărțitorul, obținem inecuația $4x < x + 5$, având mulțimea de soluții $(-\infty, \frac{5}{3})$. Cum $x \in \mathbb{N}$, rezultă $x \in \{0, 1\}$.

Dacă x ar fi egal cu 0, atunci împărțitorul ar fi 5, și restul ar fi 0, deci s-ar obține deîmpărțitul $0 \cdot 5 + 0 = 0$. **Contradicție!** Deci $x = 1$; împărțitorul este 6, restul este 4, iar deîmpărțitul este $1 \cdot 6 + 4 = 10$.

- 3 Se consideră triunghiul isoscel MNP , cu $MN = MP$. Știind că perimetrul triunghiului este egal cu 30 cm, în ce interval poate lua valori lungimea laturii NP ?

Soluție Notăm $MN = MP = x$ și $NP = y$, unde $x, y > 0$.

$\mathcal{P}_{\Delta MNP} = MN + MP + NP = 2x + y$. Din ipoteză $2x + y = 30$. Din condiția $MN + MP > NP$, obținem $2x > y$ sau echivalent $2x + y > 2y$. Obținem $30 > 2y$, deci $y < 15$. Rezultă $y \in (0; 15)$.

- 4 Într-un depozit sunt 800 kg de mere și 300 kg de pere. Din depozit, se livrează zilnic către un supermarket 50 kg de mere și 10 kg de pere. După câte zile, cantitatea de mere rămasă în depozit este mai mică decât cantitatea de pere rămasă în depozit?

Soluție Notăm cu n numărul de zile în care, după livrare, cantitatea de mere rămasă în depozit este mai mică decât cantitatea de pere rămasă. Cantitatea de mere rămasă în depozit după n zile este egală cu $(800 - 50 \cdot n)$ kg, iar cantitatea de pere rămasă în depozit după n zile este egală cu $(300 - 10 \cdot n)$ kg. Obținem $800 - 50 \cdot n < 300 - 10 \cdot n \Leftrightarrow 500 < 40n \Leftrightarrow n > 12,5$. Cum n este număr natural, obținem $n = 13$, deci, după 13 zile, cantitatea de mere rămasă în depozit este mai mică decât cantitatea de pere rămasă în depozit.

**FIXARE****EXERSARE****CONSOLIDARE****PROBLEME**

- 1** Determină cel mai mic număr natural al cărui triplu, mărit cu 76,23, depășește 115,5.
- 2** Care este cel mai mic număr natural de patru cifre al cărui succesor este un multiplu de 17?
- 3** Ce valori întregi pot avea dimensiunile unei grădini în formă de dreptunghi, știind că aria acesteia este egală cu 28 m^2 , iar lungimea este dublul lățimii?
- 4** Suma vârstelor lui Alin, Daniel și Cosmin este mai mică decât 14. Vârsta lui Cosmin este dublul vârstei lui Alin, iar Daniel este cu 3 ani mai mic decât Alin. Determină vârstele celor trei copii (exprimate prin numere naturale nenule).
- 5** O sumă de bani mai mică decât 100 de lei este plătită în bancnote de 1 leu, 5 lei și 10 lei, numărul bancnotelor de 1 leu fiind egal cu cel al bancnotelor de 5 lei și reprezentând $\frac{1}{6}$ din numărul bancnotelor de 10 lei. Cât este suma de bani?
- 6** Determină trei numere naturale nenule, știind următoarele: dacă se împarte al doilea număr la primul, se obține câtul 6 și restul 0, dacă se împarte al treilea număr la al doilea se obține câtul 5 și restul 2, iar suma celor trei numere este mai mică decât 55.
- 7** După ce a cheltuit două treimi din suma pe care o avea și încă 8 lei, apoi a cheltuit jumătate din suma rămasă, Daniel a constatat că i-au rămas mai puțin de 10 lei. Ce se poate afirma despre suma cu care a plecat Daniel la cumpărături?
- 8** Un turist a parcurs un traseu astfel: în prima zi 25% din traseu, a doua zi două treimi din rest, rămânându-i pentru a treia zi mai puțin de 12 km. Evaluează lungimea traseului.
- 9** Lățimea unui dreptunghi este cu 3 cm mai mică decât $\frac{3}{5}$ din lungime, iar perimetrul este mai mic decât 90 cm. Precizează intervalul în care se găsește lungimea dreptunghiului.
- 10** Un număr real se adună cu 14, apoi $\frac{2}{3}$ din suma obținută se adună cu dublul opusului numărului considerat. Din rezultat se scade 55 și se obține un rezultat care nu depășește 101. Precizează intervalul în care se află numărul necunoscut. Poți preciza valoarea maximă a numărului necunoscut? Dar valoarea minimă?
- 11** O cutie conține bile albe și negre, cele albe fiind cu 6 mai multe decât cele negre, iar probabilitatea ca la o extragere să se obțină o bilă albă depășește $\frac{3}{5}$. Determină numărul maxim al bilelor din cutie.
- 12** Într-un parc auto sunt 30 de autobuze și microbuze. Un autobuz poate transporta 50 de persoane, iar un microbuz poate transporta 20 de persoane. Care este numărul minim de autobuze din parcul auto pentru a putea transporta 1 000 de persoane, știind că fiecare mijloc de transport face o singură deplasare?
- 13** Determină trei numere naturale nenule știind următoarele: dacă se împarte al doilea număr la primul, se obține câtul 3 și restul 3, dacă se împarte al treilea număr la al doilea se obține câtul 5 și restul 2, iar suma celor trei numere este mai mică decât 115.
- 14** Determină:
 - a) cel mai mare număr natural de trei cifre care împărțit la 17 dă restul egal cu 15;
 - b) cel mai mic număr natural de patru cifre care împărțit la 31 dă restul egal cu 13.
- 15** Într-un bloc sunt 25 de apartamente cu 2 camere sau cu 3 camere. Determină numărul minim și numărul maxim de camere pe care îl pot avea, în total, cele 25 de apartamente.
- 16** Un triunghi ABC are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel: $AB = (x - 8) \text{ cm}$, $AC = (x + 1) \text{ cm}$ și $BC = x \text{ cm}$. Determină lungimile laturilor triunghiului ABC , astfel încât perimetrul acestuia să fie mai mic decât 25 cm.
- 17** Într-un vas sunt 5 l de apă la temperatura de 12°C . Până la ce temperatură trebuie încălziți 3 l de apă, astfel încât, făcând un amestec cu apa din vas, să se obțină apa la temperatura de cel mult 25°C ?



PROBLEME RECAPITULATIVE



- 1** Care este cel mai mare număr întreg care mărit cu 5,5 nu depășește $\sqrt{10}$?
- 2** Care este probabilitatea ca, dacă luăm la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să aparțină intervalului $[\sqrt{85}, \sqrt{850}]$?
- 3** Care este probabilitatea ca, dacă luăm la întâmplare un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 100\}$, acesta să fie:
 - a) număr rațional; b) număr irațional;
 - c) mai mare sau egal cu 5?
- 4** Dacă $a \in (1, 3)$, precizează intervalele în care se găsesc numerele $a + 2$, $2a$, $a + 4$ și $-a$.
- 5** Fie a și b două numere reale. Știind că $a \in [25, 30]$ și $b \in [10, 17]$, precizează care dintre numerele următoare poate reprezenta produsul dintre a și b .
A. 221. B. 100π . C. 511. D. 24^2 .
- 6** Fie x și y două numere reale pozitive. Știind că partea întreagă a lui x are 4 cifre, iar partea întreagă a lui y are 3 cifre, precizează care dintre numerele următoare poate reprezenta suma dintre x și y .
A. 1 025. B. 2 345,15 C. 12 349. D. 25 000.
- 7** Precizează un interval în care se găsește numărul real x , știind că valoarea aproximativă a lui x cu 2 zecimale exacte este 2,03.
- 8** Precizează intervalul în care se găsește numărul real x , știind că, prin rotunjire la sutimi, s-a obținut 3,26.
- 9** Determină numărul natural n , știind că intervalul $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ conține 5 numere întregi.
- 10** Demonstrează că $\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}} \in (5, 6)$.
- 11** Care este numărul întreg cel mai apropiat de $100\sqrt{14}$?
- 12** Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq 2x + 2 < 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\} \setminus \{1\}$. Arată că $A = B$.
- 13** Determină mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{2x-1}{3}\right| \leq 3\right\}$.
- 14** Încadrează între două numere întregi consecutive fiecare dintre numerele următoare:
 $-\sqrt{23}$; 100π ; $\sqrt{2} + \sqrt{15}$;
 $4\sqrt{21}$; $|1 - \sqrt{6}|$; $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2$.
- 15** Rotunjește la cel mai apropiat întreg, fiecare dintre numerele $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$ și $\frac{1}{\sqrt{10}}$.
- 16** a) Determină numărul întreg a , știind că $(-2, 5) \cup [a, 1] = [-3, 5)$.
b) Determină numărul întreg b , știind că $(-3, 3) \cap [-2; b) = [-2; 1)$.
- 17** a) Determină intervalul I care verifică condițiile $I \cup [-2; 1) = [-3, 4]$ și $I \cap [-2; 1) = [-2; 1)$.
b) Determină intervalul J care verifică condițiile $J \cap [0, 6] = [0, 5]$ și $J \cup [0, 6] = [-2, 6]$.
- 18** Stabilește în ce interval se află fiecare dintre numerele a , b și c care verifică relația $(a-2)^2 + (b+3)^2 + (c-4)^2 = 25$.
- 19** Se consideră numărul
$$a = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9}.$$
 - a) Calculează a .
 - b) Încadrează numărul a între două numere întregi consecutive.
- 20** Se consideră inecuația $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot x < \sqrt{18} + \sqrt{27} + \sqrt{45}$ și notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale inecuației.
 - a) Determină S .
 - b) Determină cel mai mare număr întreg din mulțimea S și cel mai mic număr întreg care nu se află în mulțimea S .





TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Cel mai mare număr întreg din intervalul $[-5; 3\sqrt{3}]$ este ...
- 5p 2 Suma numerelor întregi din intervalul $(-7; 6)$ este ...
- 5p 3 $[-4; 4] \cup [-6; 0] = \dots$
- 5p 4 Intersecția intervalelor $(-3; 6]$ și $[2; 8)$ este intervalul ...
- 5p 5 Soluțiile naturale ale inecuației $2x < \sqrt{17}$ sunt ...
- 5p 6 Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $8x - 5(2x - 4) \leq 8$ este ...

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $|2x - 3| < 5$ este:
A. $[-1; 4]$ B. $(-\infty; 4)$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $(-1; 4)$
- 5p 2 Reuniunea intervalelor $(-5; 3]$ și $[-1; 7]$ este intervalul:
A. $(-5; 7]$ B. $[-1; 3]$ C. $[3; 7]$ D. $[-5; 7]$
- 5p 3 Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| = x - 1\}$ este egală cu:
A. $(-\infty; 1)$ B. $[1; \infty)$ C. $[0; \infty)$ D. $(1; \infty)$
- 5p 4 Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $\frac{3}{x-1} \leq 0$, atunci x aparține mulțimii:
A. $[1; +\infty)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $(1; \infty)$ D. $(-\infty; 0]$
- 5p 5 Fie $a = \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$ și $x \in (-3; 1)$. Valoarea lui a este:
A. 4 B. 2 C. $2x + 2$ D. $2x - 4$
- 5p 6 Soluția reală a inecuației $2(x+3) - 4 < 6$ este:
A. $(-\infty; 1]$ B. $[0; 2)$ C. $(-\infty; 2)$ D. $(-\infty; 2]$

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

- 1 Fie numărul $a = \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{5}{8 \cdot 13} + \frac{8}{13 \cdot 21}$.
- 5p a) Calculează numărul a .
- 5p b) Demonstrează că $a \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{3})$.
- 2 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{2x+5}{3} \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x+3}{5} \right| < 1\}$.
- 5p a) Determină mulțimile A și B .
- 5p b) Determină: $A \cap \mathbb{Z}$; $B \cap \mathbb{N}$; $A \cup B$ și $A \cap B$.
- 3 Răspunzând la toate cele 100 de întrebări ale unui test, un elev a obținut 340 de puncte. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte.
- 5p a) Câte răspunsuri corecte a dat elevul?
- 5p b) Care este numărul minim de răspunsuri corecte pe care ar fi trebuit să le dea pentru a depăși 450 de puncte?



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera **A**, în caz contrar, încercuiește litera **F** (20 de puncte).

- 5p 1 Cel mai mare număr întreg din interval $[-2; 8)$ este 7. **A** **F**
- 5p 2 Suma numerelor întregi din interval $\left(-\frac{7}{3}; 3\right]$ este egală cu 0. **A** **F**
- 5p 3 Numărul -2 aparține intervalului $(-2; 2)$. **A** **F**
- 5p 4 Cel mai mare număr întreg care nu se află în intervalul $[-3; \infty)$ este -4 . **A** **F**

SUBIECTUL al II-lea. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect din coloana **B** (20 de puncte).

- | | A | B |
|------|---|--|
| 5p 1 | $[-1; 1) \cap [-3; 0] = \dots$ | a. $\left(-\frac{5}{2}; \infty\right)$ |
| 5p 2 | $\left(-\frac{5}{2}; 3\right) \cup (-1; \infty) = \dots$ | b. $[-3; 0]$ |
| 5p 3 | $\left[\sqrt{2}; \frac{13}{2}\right] \cap \mathbb{N} = \dots$ | c. $[-1; 0]$ |
| 5p 4 | $(-2, 5; 3, 1) \cap \mathbb{Z} = \dots$ | d. $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ |
| | | e. $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ |

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

- 10p 1 Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:
- a) $3(3x - 4) \geq 5(x + 2)$.
- 10p b) $2\sqrt{2}x + 9 \leq \sqrt{72} + 3x$.
- 2 Se consideră mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0, (3) < \frac{x+2}{6} \leq 1 \frac{1}{2}\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 6| \leq 12\}$.
- 10p a) Scrie mulțimile A și B sub formă de interval.
- 10p b) Determină $A \cap B$ și $A \cup B$.
- 10p c) Determină numărul natural n , știind că $n \in A$ și $n \notin B$.



FIȘĂ DE AUTOEVALUARE SISTEMATICĂ A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI:

Descarcă următorul tabel din manualul digital, completează-l și adaugă-l la portofoliul personal.

COMPORTAMENTUL	DA	NU	PARȚIAL
Am fost interesat de lecții.			
Am urmat indicațiile profesorului.			
Am lucrat individual.			
Am cerut ajutor unde nu am știut.			
Am lucrat pe grupe.			
Am participat la activitățile didactice.			
Am exersat acasă.			



Descarcă din manualul digital, apoi completează fișa de observare a unității.

2

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

UNITATEA

LECȚIA 1

Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere); reducerea termenilor asemenea

Noțiuni recapitulative

În clasele anterioare am rezolvat numeroase probleme în care am folosit în locul numerelor, litere. Să rezolvăm împreună două astfel de probleme.



Probleme rezolvate

- 1 a) La un test de matematică s-au obținut următoarele rezultate: 7 elevi au nota 7, 2 elevi au nota 8 și 4 elevi au obținut nota 9. Determină media notelor obținute la test.
 b) Determină media obținută la test dacă 7 elevi au obținut nota x , 2 elevi nota y și 4 elevi au obținut nota z .
 c) Determină media clasei dacă x elevi au obținut nota x , y elevi nota y și restul elevilor în număr de z au obținut nota z .

Soluție

$$\text{a) media} = \frac{7 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 9}{7 + 2 + 4} = \frac{101}{13} \approx 7,77. \quad \text{b) media} = \frac{7 \cdot x + 2 \cdot y + 4 \cdot z}{13}. \quad \text{c) media} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}.$$

- 2 Un triunghi are o latură de lungime a cm și înălțimea corespunzătoare de lungime b cm. Un alt triunghi are aceeași arie și lungimea bazei cu x cm mai mică decât cea a primului triunghi, $x < a$. Exprimă înălțimea corespunzătoare bazei celui de-al doilea triunghi.

Soluție Din egalitatea ariilor celor două triunghiuri avem $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{(a-x) \cdot h}{2}$, unde cu h am notat înălțimea cerută. Obținem $h = \frac{a \cdot b}{a-x}$.

Scurt istoric

Algebra este acea parte a matematicii derivată din aritmetică, ca o extindere a acesteia și care se ocupă cu rezolvarea ecuațiilor. Marele învățat arab, pe nume *Abu Abdullah Muhammad bin Musa*, considerat „părintele algebrei” a scris, în jurul anului 800, lucrarea *al-Kitāb al Mukhtaṣar fī Hisāb al-Jabr wal-Muqābalah*. (*Compendiu de calcul prin completare și echilibrare*) unde folosește, chiar în titlu, pentru prima dată termenul „al-Jabr”, care a devenit la europeni „algebră”.



Deosebirea esențială între aritmetică și algebră este următoarea: în timp ce aritmetica operează cu numere, în algebră *operăm cu litere* care sunt simboluri ale numerelor.

Rezolvarea multor probleme cu caracter concret, rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor, exprimarea unor formule, reguli sau legi din domeniul matematicii, al fizicii și al chimiei necesită utilizarea literelor ca simboluri ale numerelor reale.



Sume algebrice



Reducerea termenilor asemenea

Cele mai simple operații ce se pot efectua cu numere reale sunt adunarea și scăderea. Însă adunarea are proprietăți care sunt utile în calcule, în timp ce scăderea nu are asemenea proprietăți (nu este comutativă, nu este asociativă). De aceea, în algebră este preferabil să înlocuim scăderea prin adunarea dintre descăzut și opusul scăzătorului.

Astfel, o succesiune de adunări și scăderi poate fi gândită numai ca o succesiune de adunări, ceea ce permite aplicarea proprietăților adunării.

Exemplu

$$\begin{aligned} 7x + 9y - 10x - 25y - 13x - y &= 7x + 9y + (-10x) + (-25y) + (-13x) + (-y) = \\ &= 7x + (-10x) + (-13x) + 9y + (-25y) + (-y) = x(7 - 10 - 13) + y(9 - 25 - 1) = -16x - 17y. \end{aligned}$$

- Prin sumă algebrică înțelegem așadar o succesiune de adunări și scăderi.
- Fiecare termen al unei sume algebrice este de forma cL unde c este un număr real numit *coeficient*, iar L este *partea literală*, adică un produs de puteri (cu exponenți întregi) de numere reale reprezentate prin litere.
- Dacă un termen nu conține parte literală, atunci acesta reprezintă *termenul liber*.

Exemplu

Suma algebrică $S = 2xy^{-1} - x^2 - 7xy^{-1} + 5$ are patru termeni. Termenul $2xy^{-1}$ are coeficientul 2 și partea literală xy^{-1} , termenul $-x^2$ are coeficientul -1 și partea literală x^2 . Termenul $-7xy^{-1}$ are coeficientul -7 și partea literală xy^{-1} . Termenul 5, format doar din coeficient, este un termen liber.

- Doi termeni care au aceeași parte literală se numesc *termeni asemenea*.

Exemplu

Termenii $2xy^{-1}$ și $-7xy^{-1}$ sunt termeni asemenea. Suma lor este $2xy^{-1} - 7xy^{-1} = (2 - 7)xy^{-1} = -5xy^{-1}$.

Observație

Putem scrie pe baza distributivității înmulțirii față de adunare,

$$c_1L + c_2L + \dots + c_nL = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)L,$$

adică suma unor termeni asemenea se obține făcând suma algebrică a coeficienților și păstrând partea literală.

- Înlocuirea termenilor asemenea prin suma lor poartă numele de *reducerea termenilor asemenea*.

Observație

Pentru ușurința indentificării, vă propunem să subliniați distinct termenii asemenea față de ceilalți termeni.

Exemple

$$1. \quad \underline{\sqrt{2}x} + \underline{\sqrt{3}x^2} - \underline{2\sqrt{2}x} - \underline{3\sqrt{3}x^2} = (\sqrt{2} - 2\sqrt{2})x + (\sqrt{3} - 3\sqrt{3})x^2 = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}x^2.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{1}{3}xy - (-2x^2y) - x^2y - \frac{2}{3}xy + 5 &= \underline{\frac{1}{3}xy} + \underline{2x^2y} - \underline{x^2y} - \underline{\frac{2}{3}xy} + 5 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)xy + (2 - 1)x^2y + 5 = -\frac{1}{3}xy + x^2y + 5. \end{aligned}$$



**Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale, reprezentate prin litere**

Pentru a scrie sub o formă mai simplă produsul unor numere reale reprezentate prin litere sau puterea unui număr real, aplicăm proprietățile înmulțirii sau regulile de calcul cu puteri.

Exemple

1. Produsul numerelor $2x$ și $-3x^5$ este $(2x) \cdot (-3x^5) = 2 \cdot (-3) \cdot x \cdot x^5 = -6x^6$.
2. Produsul numerelor $\sqrt{2} a^3 b^2$ și $-5\sqrt{2} ac^2$ este
 $(\sqrt{2} a^3 b^2) \cdot (-5\sqrt{2} ac^2) = \sqrt{2} \cdot (-5\sqrt{2}) \cdot a^3 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^2 = -10a^4 b^2 c^2$.
3. Puterea a patra a numărului $(-2x^5 y^3)$ este $(-2x^5 y^3)^4 = (-2)^4 \cdot (x^5)^4 \cdot (y^3)^4 = 16x^{20} y^{12}$.

REȚINE!

- Pentru a înmulți două numere reale reprezentate prin litere, înmulțim coeficienții între ei, respectiv părțile literale între ele.
- Pentru a ridica la o putere un număr reprezentat prin litere, atât coeficientul, cât și partea literală se ridică la aceea putere.

**Înmulțirea unui factor cu o sumă algebrică**

Înmulțirea unui factor cu o sumă algebrică se realizează cu ajutorul distributivității înmulțirii față de adunare.

Exemple

1. $(-3)(x - y - z) = -3x + 3y + 3z$;
2. $2x^2 y^{-2} (x^2 + y^2 - 1) = 2x^4 y^{-2} + 2x^2 - 2x^2 y^{-2}$.

**Produsul dintre două sume algebrice**

Ne propunem să găsim procedeul de calcul al produsului dintre suma $a + b + c$ și suma $x + y + z$. Pentru aceasta, notăm $x + y + z = S$ și aplicăm distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$(a + b + c)(x + y + z) = (a + b + c)S = aS + bS + cS = a(x + y + z) + b(x + y + z) + c(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz + cx + cy + cz.$$

REȚINE!

Pentru a înmulți două sume algebrice, înmulțim fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al celei de a doua sume și apoi facem suma algebrică a termenilor obținuți.

Exemple

1. $(a + b) \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y$.
2. $(a - b) \cdot (-x + y) = -a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x - b \cdot y$.
3. $(x + y)(-x + y + 3) = -x^2 + xy + 3x - xy + y^2 + 3y = -x^2 + 3x + y^2 + 3y$.

**Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere**

A împărți două numere reale x și y (unde $y \neq 0$) înseamnă a înmulți numărul x cu inversul lui y sau, echivalent, a găsi numărul z cu proprietatea $x = yz$.

Exemple

1. Câtul numerelor $16x^5 y^2$ și $2xy$ este $8x^4 y$, pentru că $(8x^4 y)(2xy) = 16x^5 y^2$. Altfel, scriem câtul sub formă de fracție și o simplificăm: $\frac{16x^5 y^2}{2xy} = 8x^4 y$.

2. Câtul numerelor reale $\frac{xyz}{a}$ și $\frac{y^2}{a^2}$ (unde $a \neq 0, y \neq 0$) este: $\frac{xyz}{a} \cdot \frac{a^2}{y^2} = \frac{a^2xyz}{ay^2} = \frac{axz}{y}$.

3. Câtul numerelor reale $-\frac{2}{3}a^4 + \frac{5}{6}a^3 + \frac{3}{2}a^2$ și $\frac{a^2}{2}, a \neq 0$ este:

$$\left(-\frac{2}{3}a^4 + \frac{5}{6}a^3 + \frac{3}{2}a^2\right) \cdot \frac{2}{a^2} = -\frac{4}{3}a^2 + \frac{5}{3}a + 3.$$



Probleme rezolvate

1 Calculează $[(x-y)(x+2y)-(x+y)(x-2y)]^2 : (4y^2)$, unde $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.

Soluție Ținând seama de regulile privind ordinea operațiilor și folosirea parantezelor, avem:

$$\begin{aligned} & [x^2 + 2xy - xy - 2y^2 - (x^2 - 2xy + xy - 2y^2)]^2 : (4y^2) = \\ & = (x^2 + xy - 2y^2 - x^2 + xy + 2y^2)^2 : (4y^2) = (2xy)^2 : (4y^2) = (4x^2y^2) : (4y^2) = x^2. \end{aligned}$$

2 O formație muzicală a susținut două spectacole. După ce la primul spectacol s-au vândut toate biletele, la al doilea spectacol s-a mărit prețul biletului cu 25%, dar încasările au crescut numai cu 10%. Cu ce procent s-a micșorat numărul spectatorilor?

Soluție Notăm cu a numărul spectatorilor și cu b prețul biletului la primul spectacol. Suma încasată la primul spectacol este ab . Suma încasată la al doilea spectacol este 110% din ab , adică $\frac{110ab}{100} = \frac{11ab}{10}$, iar prețul unui bilet a devenit $\frac{125b}{100} = \frac{5b}{4}$. Deci numărul spectatorilor la al doilea spectacol a fost

$$\frac{11ab}{10} : \frac{5b}{4} = \frac{22a}{25} = \frac{88}{100}a.$$

Numărul spectatorilor la al doilea spectacol reprezintă 88% din numărul celor de la primul spectacol.

În concluzie, numărul spectatorilor a scăzut cu $100\% - 88\% = 12\%$.

3 Un patrulater are lungimile laturilor egale cu $a+b, 3a+2b, a+2b$ și $3a+3b, a, b > 0$. Află lungimea laturii unui pătrat care are perimetrul egal cu perimetrul patrulaterului.

Soluție Perimetrul patrulaterului este egal cu $(a+b) + (3a+2b) + (a+2b) + (3a+3b) =$

$= a+b+3a+2b+a+2b+3a+3b = (a+3a+a+3a) + (b+2b+2b+3b) = 8a+8b$. Rezultă că perimetrul pătratului este $8a+8b$, deci latura pătratului va avea lungimea $(8a+8b) : 4 = 8 \cdot (a+b) : 4 = 2 \cdot (a+b)$.

4 Arată că $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} \cdot x + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} \cdot x = \sqrt{(\sqrt{18}-5)^2} \cdot x$, unde x este număr real.

Soluție $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} = |3-2\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2}$, deoarece $3-2\sqrt{2} > 0$; $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} = |\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$, deoarece $\sqrt{2}-2 < 0$; $\sqrt{(\sqrt{18}-5)^2} = |\sqrt{18}-5| = 5-\sqrt{18}$, deoarece $\sqrt{18}-5 < 0$. Rezultă:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} \cdot x + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} \cdot x = (3-2\sqrt{2}) \cdot x + (2-\sqrt{2}) \cdot x = 3x - 2\sqrt{2}x + 2x - \sqrt{2} \cdot x = \\ & = 5x - 3\sqrt{2} \cdot x \text{ și } \sqrt{(\sqrt{18}-5)^2} \cdot x = (5-\sqrt{18}) \cdot x = 5x - 3\sqrt{2} \cdot x, \text{ deci are loc egalitatea din enunț.} \end{aligned}$$





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME

**1** Adu la forma cea mai simplă:

- a) $x - x + x$; b) $2a^3 - a + a^3 - 4a^3$;
 c) $2x - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{5} - 2, 5x + 0, 5x^3 - x^2$;
 d) $1\frac{1}{3}x + 2xy - 2x + 5, (6)x - 3xy$;
 e) $\frac{11}{6}x^2 + 5a - 2xy - 0, 5xy^2 + 7xy - 9x^2 -$
 $-a - \frac{3}{2}xy^2 - 1, 8(3)x^2$.

2 Efectuează:

- a) $2a + 5a$; b) $a^2 - 4a^2$; c) $-7xy + 4xy$;
 d) $\frac{1}{2}b - 2b + 0, 4b$; e) $\sqrt{2} - 2x + 4x - 2x$;
 f) $4x^2y - 3xy^2 - 2x^2y + 3xy^2$;
 g) $-\frac{1}{3}a^2 + ab^2 - \frac{1}{2}a^2$; h) $-ab + \frac{2}{3}ab - \frac{1}{4}ab$;
 i) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}x - \frac{7}{2}x + x$.

3 Efectuează, reducând termenii asemenea:

- a) $2a - (-3a) + (-5a) - b - (-b)$;
 b) $\frac{1}{2}ab - (-a^2) - a^2 - \frac{1}{3}ab$;
 c) $(2a + 3) + (2a - 3) - (2a + 1) - (-3a + 2)$;
 d) $(2x + 3y) + (-4x + 5y - 1) - (-3x + 8y - 4)$;
 e) $x^3 - 5x^2 + 2x - 7 - (x^3 + 4x - 1) + (x^2 + 6x + 2)$;
 f) $(x + 2y - 4) - (-3x - y - 5) - 3y$;
 g) $-\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5\right) + \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1\right)$;
 h) $(-2x^2 + x - 5) - (-x^2 + 3x - 2) + (x^2 - x - 9)$;
 i) $(2x + \sqrt{3}y) + (-4x + 2\sqrt{3}y - 1) - (3x + 3\sqrt{3}y - 4)$;
 j) $(x + y + z) + (x - y + z) - (x + y - z) - (x - y - z)$;
 k) $(a^3 + a^2 + a + 1) - (a^3 - a^2 + a - 1) - (2a^2 + 2)$.

4 Efectuează:

- a) $(x^2) \cdot (-2x)$; b) $\left(\frac{1}{2}xy\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2y\right)$;
 c) $(\sqrt{2}a^2b) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}b\right)$; d) $(2x^2)^2$;
 e) $\left(-\frac{1}{2}a^2\right)^3$; f) $(5x^2 - 7x^2)^2$;

g) $(-3x^2) : (+x), x \neq 0$;

h) $(-14x^2y) : (7xy), x, y \in \mathbb{R}^*$;

i) $\left(-\frac{3}{7}a^2b^2\right) : \left(-\frac{1}{14}a\right), a \neq 0$;

j) $x^7 : (-2x^4), x \in \mathbb{R}^*$;

k) $\left(-\frac{4}{3}a^3\right) : \left(+\frac{2}{3}a^2\right), a \in \mathbb{R}^*$.

5 Efectuează:

- a) $2a(a - 3b)$; b) $-2x^2(x^2 - 3x + 1)$;
 c) $2a(a + b) - 2b(a - b) - 2(a^2 + b^2)$;
 d) $(a + 2) \cdot (a + 3)$; e) $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;
 f) $(8a^2 - 6a) : (+2a), a \in \mathbb{R}^*$;
 g) $(-9x^3 - 12x^2) : (-3x), x \neq 0$;
 h) $(5x^2y - 12xy^2) : (-3xy), x, y \in \mathbb{R}^*$;
 i) $\left(-\frac{3}{8}x^4 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2\right) : \left(-\frac{3}{10}x^2\right), x \neq 0$;
 j) $(-2x) \cdot (3x^2) \cdot (-4x^3) : (-8x^4), x \in \mathbb{R}^*$.

6 Efectuează:

- a) $(2x - 1)(3x - 2) - 4x(x + 3) + 2(x + 1)(x - 2)$;
 b) $(x + 1)(3x - 5) - 3(x + 2)(x - 4) - 2x(x + 6)$;
 c) $(2x + 1)(x + 2) - (x + 1)(2x + 1) - x(x - 1)$;
 d) $-3ab(a^2 + b^2) + ab(a^2 - b^2) + 2ab(a^2 + 2b^2)$;
 e) $(3a - 2)(a^2 - 3a + 4) - (2a - 3)(a^2 - a + 1)$;
 f) $(6x^3 - 12x^2 + 4x) : (-2x) + (12x^4 - 8x^3) :$
 $: (-4x^3), x \in \mathbb{R}^*$.

7 Efectuează înmulțirile și redu termenii asemenea:

- a) $2(x + y + 5z)$;
 b) $-5(x - y) + 3(x + y) + (-2) \cdot (-y)$;
 c) $x(x + y) - y(x - y)$;
 d) $2(x + y)(x - y) - 5(x^2 + y^2)$;
 e) $(a + b)(x^2 - ab + b^2) - b^2$;
 f) $a^3 - (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
 g) $(x + xy) \cdot (-2y) + 7xy^2 + x(x - y) - 2(x + y)x$.



8 Efectuează:

- $(2x^3) \cdot (xy)^2 \cdot (x + x^2 - y) : x^2, x \neq 0;$
- $a^{-1}(a^3 + ab) \cdot (b^2)^3 + (ab^3)^2, a \neq 0;$
- $(\sqrt{2}a)^2 \cdot (\sqrt{3}b)^3 : (ab) - \sqrt{3}a(b^{-3})^{-3} \cdot b^{-7}, a, b \neq 0;$
- $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}xy^2\right)^5 \cdot (\sqrt{2}x)^{-5} + y - (0,25 \cdot y^3)^2 - \frac{4}{3}y, x \neq 0;$
- $\left(\frac{1}{3}x\right)^4 \cdot (\sqrt{3}y)^8 \cdot (xy^2)^{-2} + \frac{1}{2}x^2 \cdot (y^{-4})^{-1}, x, y \neq 0;$
- $x(x + y + 1) - y(x - 1);$
- $[0, (3) \cdot x^{-2}]^3 : (3x)^{-4}, x \neq 0;$
- $\frac{14}{3}y^2 - \frac{1}{2}xy - 3, 2x - 1, (6)(y^{-2})^{-1} + 5xy + 3, 4x;$
- $(x + y)(x + 2y) + (x - y)(x + y) - x^3y(1 + y^2) : x^2;$
- $(a - 2b)(a + b)(2a - b) + 5ab(3a - 4b);$
- $(x + y + z)(y - z) - (x + z)(y - 2z).$

9 Efectuează:

- $(x - 1)(x - 1);$
- $(x + y)(x + y);$
- $(x + 1)(x + 2);$
- $(x + 2a)(x + 3a);$
- $(x^2 - 5a)(x^2 - 2a);$
- $(x^2 + 2)(x^2 - 7);$
- $(1 + x + x^3 + x^4) \cdot (x - 1) + 2(x^5 + x^7 + x^8) : x^3;$
- $2(a - b)(a - b) + 3(a + b)(a + b) + (a - b)(a + b);$
- $(2x^3 + x^2 - 5x + 3)(3x^3 - 2x^2 - x - 4).$

10 Dacă $A = x^{11+2+3+4+\dots+99+100} : x^{1+2+\dots+10} \cdot x^5 + x^7 - 1$ și $B = (xy - y) \cdot (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot y^{-1}$, $y \neq 0$, calculează $(B - A)^{2024}$.

11 Calculează:

- $\sqrt{64a^2b^2} + a(2b - 3a), (a, b < 0);$
- $[(ab - 1)(a^2b^2 + ab + 1) + 1] : ab + \sqrt{121a^4b^4};$
- $\sqrt{48x^2y^4} - \sqrt{75x^2y^4} - \sqrt{192} \cdot |x| \cdot y^2 - \sqrt{3}|x|y^2.$

12 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

- $(a^2 + b)(a^2 - 5b) = a^4 - 4a^2b - 5b^2;$
- $(a - 2b)(a - 4b) = (a - 4b)(a - b) + (\sqrt{2}b)^2;$
- $(a + 4b)(3a + b) = (a + 9b)(a + 4b) + 2a(a + b) - 32b(a + b).$

13 Prețul unui obiect a crescut cu 25%, apoi s-a redus, revenind la prețul inițial. Cu cât s-a redus prețul?

14 Demonstrează că:

- produsul a două numere naturale terminate în 25 se termină în 25;
- produsul a două numere naturale terminate în 76 se termină în 76.

15 Dacă $a - b = 1$, calculați $(a - b)(a + b) - 2b$.

16 Ionuț îi propune colegului de bancă Dragoș următorul test:

- ✓ alege un număr întreg fără ca eu să-l știu;
- ✓ scade din numărul ales pe 2;
- ✓ înmulțește rezultatul obținut cu numărul inițial mărit cu 3;
- ✓ Din noul rezultat scade produsul dintre numărul ales și succesorul lui.

Dragoș rămâne surprins când Ionuț i-a comunicat rezultatul final, și anume -6 .

a) Cum a procedat Ionuț pentru a determina rezultatul final?

b) Propune și tu colegului (colegei) de bancă un test asemănător în care rezultatul final să fie -20 .

17 Iată un truc prin care putem afla vârsta unei persoane și luna în care s-a născut:

Cerem persoanei să scrie numărul de ordine al lunii în care s-a născut, să dubleze acest număr, să adauge 5, să înmulțească rezultatul cu 50, la rezultat să adune vârsta pe care o are (trebuie ca persoana să aibă mai puțin de 100 de ani), apoi să scadă 250 și să ne comunice rezultatul. Ultimele două cifre ale rezultatului indică vârsta persoanei, iar restul numărului reprezintă numărul de ordine al lunii în care s-a născut.

De exemplu, dacă persoana ne comunică rezultatul 1 126 înseamnă că are 26 de ani și s-a născut în luna a unsprezecea.

Găsește explicația matematică a acestui truc.

18 Calculează suma $S = (x + 2y) + (2x + 4y) + (3x + 6y) + \dots + (50x + 100y)$, unde x și y sunt numere reale cu proprietatea $x + 2y = 2x + 4y + 1$.

19 Calculează:

- $(2a - 3b + 4)^5 : (-2a + 3b - 4)^5$, dacă $-2a + 3b - 4 \neq 0;$
- $(7x - 5y - 3)^{11} + (3 + 5y - 7x)^{11};$
- $8^6 \cdot (2z - 3t)^{18} - (4z - 6t)^{18}.$

LECȚIA 2

Formule de calcul prescurtat

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}; (a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}$$

În cele ce urmează, vom stabili formule pentru calculul unor anumite expresii întâlnite frecvent, formule care ne ajută să efectuăm calcule mai rapid. Aceste formule de calcul, numite *formule de calcul prescurtat*, sunt utile atât în calculul unor expresii reprezentate prin litere, cât și pentru efectuarea unor calcule numerice rapide.

⇒ **Formulă de calcul prescurtat pentru $(a+b)^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$**

Calculând $(a+b)^2$, avem: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

REȚINE!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

⇒ **Formulă de calcul prescurtat pentru $(a-b)^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$**

Înlocuind în formula precedentă pe b prin $-b$, obținem formula:

REȚINE!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemple

1. $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.
2. $(2a-5)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 = 4a^2 - 20a + 25$.
3. $(-a-4)^2 = [(-a)+(-4)]^2 = (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \cdot (-4) + (-4)^2 = a^2 + 8a + 16$.
4. $21^2 = (20+1)^2 = 20^2 + 20 \cdot 2 + 1 = 400 + 40 + 1 = 441$.

În unele situații este util să scriem expresia $a^2 \pm 2ab + b^2$ sub forma $(a \pm b)^2$, adică să *restrângem pătratul*.



ATENȚIE!

Cele două formule stabilite anterior este util a fi reținute și sub formele:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

În acest caz, spunem că *restrângem pătratul* unei anumite expresii.

Exemple

1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2x + 1^2 = (2x+1)^2, x \in \mathbb{R}$.
2. $9x^2 \cdot y^2 - 12xy + 4 = (3xy)^2 - 2 \cdot (3xy) \cdot 2 + 2^2 = (3xy-2)^2, x, y \in \mathbb{R}$.
3. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$.

⇒ **Formulă de calcul prescurtat pentru $(a-b)(a+b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$**

Calculând $(a+b)(a-b)$, avem $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$. Reținem formula:

REȚINE!

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Observații

1. Formula anterioară se mai numește formulă pentru *produsul sumei prin diferență*.
2. Formula anterioară este utilă să fi reținută și sub forma

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$
 În acest caz o putem numi formula *diferenței de pătrate* a două numere reale.

Exemple

1. $(3x + 2)(3x - 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4.$
2. $(x + y + 5)(x + y - 5) = (x + y)^2 - 5^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 25.$
3. $(5\sqrt{3} + 6\sqrt{2})(5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}) = (5\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{2})^2 = 75 - 72 = 3.$
4. $99 \cdot 101 = (100 + 1)(100 - 1) = 10\,000 - 1 = 9\,999.$
5. $\sqrt{337^2 - 288^2} = \sqrt{(337 + 288)(337 - 288)} = \sqrt{625 \cdot 49} = 25 \cdot 7 = 175.$

**O aplicație a formulelor de calcul prescurtat: raționalizarea numitorilor unor fracții**

În clasa a VII-a am văzut că, pentru a raționaliza numitorul de forma $k\sqrt{a}$, unde $k \in \mathbb{Z}^*$, $a > 0$ al unei fracții, se amplifică fracția cu $\sqrt{a}$. Ne propunem în continuare să stabilim cu ajutorul formulelor de calcul prescurtat metoda de a raționaliza un numitor de forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, unde $a > 0$ și $b > 0$. Cu ajutorul formulei produsului sumei prin diferență, avem:

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} \mp \sqrt{b}) = a - b.$$

De aici deducem că expresia conjugatei lui $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ este expresia $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Rezultatele anterioare pot fi sistematizate în tabelul alăturat:

E (expresia)	C (conjugata)	E · C
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$a - b$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a - b$

Exemple

1. Pentru fracția $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$, amplificăm așadar cu $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ și obținem:

$$\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

2. Pentru fracția $\frac{1}{2 - \sqrt{6}}$, amplificăm cu $2 + \sqrt{6}$ și obținem:

$$\frac{1}{2 - \sqrt{6}} = \frac{2 + \sqrt{6}}{(2 - \sqrt{6})(2 + \sqrt{6})} = \frac{2 + \sqrt{6}}{4 - 6} = \frac{2 + \sqrt{6}}{-2}.$$

3. Pentru fracția $\frac{7}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}}$, amplificăm cu $2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$ și obținem:

$$\frac{7}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}} = \frac{7(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})}{(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})} = \frac{7(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})}{(2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{7(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})}{20 - 27} = \frac{7(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})}{-7} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}.$$

**Problemă rezolvată**

Demonstrează că numărul $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ este irațional.

Soluție Presupunem că $\sqrt{5} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ și notăm $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$. Atunci $a^2 = 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 2\sqrt{15} + 8$. Rezultă $\sqrt{15} = \frac{a^2 - 8}{2}$ și, cum am presupus că $a \in \mathbb{Q}$, rezultă că $\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$, ceea ce este fals, deoarece numărul natural 15 nu este pătrat perfect. Deci $\sqrt{5} + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1** Calculează:
- a) $(x+1)^2$; b) $(x-1)^2$;
 c) $(2-x)^2$; d) $(2x-y)^2$; e) $(5x^2+7y^2)^2$;
 f) $(2x-3\sqrt{3})^2$; g) $(\sqrt{5}-2x)^2$; h) $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$;
 i) $\left(x^3-\frac{1}{3}\right)^2$; j) $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}\right)^2$; k) $\left[\frac{x}{5}-1, (6)\right]^2$;
 l) $\left(4x+\frac{y}{3}\right)^2$; m) $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\right)^2$; n) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)^2$;
 o) $\left(\frac{4x}{3}+\frac{9a}{2}\right)^2$; p) $\left(\frac{x}{2}-0,5 \cdot y^4\right)^2$;
 q) $(x\sqrt{5}+y\sqrt{2})^2$; r) $(x\sqrt{3}-a\sqrt{7})^2$;
 s) $\left(a\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^2$; t) $\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2$.

- 2** Dezvoltă:
- a) $(x+1)^2$; b) $(2+x)^2$;
 c) $(2x+1)^2$; d) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$; e) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{3}{2}\right)^2$;
 f) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$; g) $(-2a-b)^2$; h) $\left(\frac{3}{4}x^2-2x\right)^2$;
 i) $(2\sqrt{2}-x)^2$; j) $(2x+y+1)^2$; k) $(x-2y+1)^2$.

- 3** Completează spațiile libere, folosind formule de calcul prescurtat pentru a obține propoziții adevărate:

- a) $(x+2)(x-2) = x^2 - \dots$;
 b) $(2a+3)(2a-3) = \dots - 9$;
 c) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-\dots\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$;
 d) $(0,1x+1)^2 = \frac{1}{100}x^2 + 1 + \dots$

- 4** Demonstrează că $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ și $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sunt numere iraționale.

- 5** Scrie sub formă de pătrat al unei sume sau al unei diferențe:

- a) x^2+6x+9 ; b) $4a^2-4a+1$;
 c) x^2+2x+1 ; d) $3+2\sqrt{2}$; e) $8-2\sqrt{15}$;
 f) $x^2+2\sqrt{2}x+2$; g) $2x^2-2x\sqrt{2}+1$;
 h) $5+2\sqrt{6}$; i) $4-2\sqrt{3}$; j) $11-4\sqrt{7}$;
 k) $14-6\sqrt{5}$; l) a^2-2a+1 ;
 m) $4a^2+9b^2+12ab$; n) $7+2\sqrt{10}$.

- 6** Calculează:
- a) $(x-5)(x+5)$; b) $(7+y)(7-y)$;
 c) $(2x+3)(2x-3)$; d) $(1-x)(1+x)$;
 e) $(x^2+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3})$; f) $(\sqrt{7}+2y)(\sqrt{7}-2y)$;
 g) $(x-2y)(x+2y)$; h) $(5x+4y^2)(5x-4y^2)$;
 i) $\left(\frac{x^3}{2}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x^3}{2}-\frac{y}{4}\right)$; j) $\left(a\sqrt{3}-\frac{b}{2}\right)\left(a\sqrt{3}+\frac{b}{2}\right)$;
 k) $96 \cdot 104$; l) $37 \cdot 43$; m) $(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})$;
 n) $(\sqrt{101}-10)(\sqrt{101}+10)$.

- 7** Calculează:
- a) $(x-1)(x+1)+(x+1)^2-(x-1)^2$;
 b) $(x^2+1)(x-1)+(x+1)^2$;
 c) $(2x+y)^2+(2x-y)^2-(3x+y)(3x-y)$;
 d) $(3x-2y)^2+(x+4y)^2-(5x-y)(5x+y)$;
 e) $(x\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(x\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{14}+3)(\sqrt{14}-3)$;
 f) $(2x-0,3y)^2+(3x+0,2y)^2-13\left(x-\frac{y}{10}\right)\left(x+\frac{y}{10}\right)$;
 g) $(x+2)^2+(x-2)^2+(x+2)(x-2)$;
 h) $(2x-y)^2-(2x+3y)^2+(x+y)(x+2y)-$
 $-(x+3y)(x-3y)$;
 i) $\left(5\sqrt{5}-\frac{x}{2}\right)\left(5\sqrt{5}+\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$;
 j) $99^2+100^2+101^2-3 \cdot 99 \cdot 101$;
 k) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})+$
 $+\dots+(\sqrt{98}-\sqrt{99})(\sqrt{98}+\sqrt{99})$;
 l) $9 \cdot 11+19 \cdot 21+29 \cdot 31+\dots+99 \cdot 101-10^2-$
 $-20^2-\dots-90^2-100^2$;
 m) 105^2 ; n) $198^2+202^2-198 \cdot 202$.

- 8** a) Calculează $(3k)^2$; $(3k+1)^2$; $(3k+2)^2$;
 b) Ce valori poate lua restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 3?
 c) Arată că numerele 30000005 și $9 \overline{00 \dots 0} 2$ nu sunt pătrate perfecte.

de 2 025 de ori



9 a) Ce valori poate lua restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 4?

b) Arată că nu există numere întregi a, b , astfel încât $a^2 + b^2 = (19 - 3\sqrt{2})(19 + 3\sqrt{2})$.

10 Raționalizează numitorii și efectuează calculele:

a) $\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{6}+1} - \frac{5}{\sqrt{2}-1} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$,

b) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5} - \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

11 Determină numărul natural nenul n pentru care:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 4.$$

12 Dacă se mărește latura unui pătrat cu 3 cm se obține un pătrat cu aria mai mare cu 39 cm^2 decât aria pătratului inițial. Care este perimetrul pătratului inițial?

13 Calculează rapid, folosind formule de calcul prescurtat:

a) $97 \cdot 103$; b) $1996 \cdot 2004$; c) 499^2 ;

d) 3005^2 ; e) $8765^2 - 8764 \cdot 8766$;

f) $25999 \cdot 26001 - 26000^2$;

g) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) - 2^{32}$.

14 Dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $x + \frac{1}{x} = 5$, calculează:

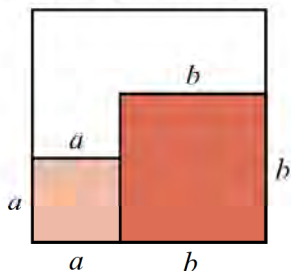
a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$; b) $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

15 Dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$, calculează valorile lui $x - \frac{1}{x}$.

16 Calculează media geometrică a numerelor

$$a = \sqrt{15} - \sqrt{6} \text{ și } b = \sqrt{15} + \sqrt{6}.$$

17 Un elev decupează dintr-o bucată de carton în formă de pătrat o bucată formată din pătratele alăturate de latură a , respectiv b . Compară aria suprafeței colorate cu aria suprafeței necolorate.



18 Se consideră expresia

$$E(x) = (x+2)^2 + (x-3)^2 - 2(x+4)^2,$$

unde x este număr real.

a) Arată că $E(x) = -18x - 19$.

b) Stabilește dacă numărul

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

este rațional sau irațional.

19 Se consideră expresia

$$E(x) = (4x-3)(4x+3) + (3x-1)^2 - (5x-2)^2,$$

unde x este număr real.

a) Arată că $E(x) = 2(7x-6)$.

b) Determină numerele raționale a și b cu proprietatea $E(a+b\sqrt{2}) = 2 + 14\sqrt{2}$.

20 Se consideră expresiile $E_1(x) = (2x-1)^2 - (3x+1)^2$ și $E_2(x) = (3x-1)^2 - (2x+1)^2$, unde x este număr real.

a) Arată că $E_1(x) + E_2(x) = -20x$.

b) Demonstrează că $\frac{E_1(\sqrt{3})}{E_2(\sqrt{3})} = (2+\sqrt{3})^2$.

21 Arată că numărul

$$a = (\sqrt{1}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{4}) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{1}) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{4}+\sqrt{3})$$

este întreg.

22 Arată că numărul

$$x = (\sqrt{45} + \sqrt{2024} - \sqrt{45 - \sqrt{2024}})^2$$

este întreg.

23 a) Verifică egalitatea: $\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$, unde k este număr natural nenul.

b) Arată că numărul $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{99\sqrt{100}+100\sqrt{99}}$ este rațional.

24 Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x+1 = 3y$ și $x \in [-1, 2)$.

Demonstrează că numărul

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$$

are valoare constantă.

25 Se consideră numărul $x = \sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}$.

a) Verifică egalitatea $x \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

b) Arată că $(x\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^{100}$ este număr natural pătrat perfect.

LECȚIA 3

Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul prescurtat)

Scrierea sub formă de produs este utilă pentru efectuarea împărțirilor, pentru simplificarea unor fracții, pentru demonstrarea unor proprietăți de divizibilitate sau pentru rezolvarea unor ecuații. Metodele de descompunere în factori se bazează pe formulele de calcul prescurtat și pe proprietățile operațiilor cu numere reale.



Metoda factorului comun

Această metodă constă în aplicarea distributivității înmulțirii față de adunare (scădere). Când aplicăm formulele

$$ab + ac = a(b + c) \text{ și } ab - ac = a(b - c)$$

spunem că am scos *factor comun* pe a . Formulele se extind pentru cazul sumelor algebrice cu mai mulți termeni.

Exemple

- $2x + 2y + 4z - 6u = 2(x + y + 2z - 3u);$
- $xy + xy^2 - xy^3 + x = x(y + y^2 - y^3 + 1);$
- $a(x + 1) + b(x + 1) = (x + 1)(a + b).$



Metoda restrângerii unui pătrat

Această metodă constă în aplicarea formulei:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Exemple

- $9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a)^2 + 2 \cdot (3a) \cdot (2b) + (2b)^2 = (3a + 2b)^2;$
- $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2;$
- $(a + b)^2 - 2(a + b) + 1 = (a + b - 1)^2.$



Metoda diferenței pătratelor

Această metodă constă în aplicarea formulei:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemple

- $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a + 2)(a - 2);$
- $16 - b^4 = 4^2 - (b^2)^2 = (4 - b^2)(4 + b^2) = (2 + b)(2 - b)(b^2 + 4);$
- $3 - x^2 = (\sqrt{3})^2 - x^2 = (\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x).$



Metoda grupării termenilor

Sunt situații în care aplicarea metodelor prezentate anterior nu se poate face în mod direct. În acest caz, termenii trebuie grupați în mod corespunzător, în așa fel încât aplicând succesiv metodele de mai sus să poată apărea un factor comun tuturor termenilor expresiei date, astfel încât, rezolvarea să se poată reduce la metoda factorului comun.

Comentariu

În multe situații, pentru a realiza gruparea termenilor, este necesar ca anumiți termeni ai expresiei să fie scriși ca o sumă de doi sau mai mulți termeni.

Exemple

1. $x^2 + 2ax + a^2 + 3x + 3a = (x + a)^2 + 3(x + a) = (x + a)(x + a + 3)$;
2. $ax + bx - 7a - 7b = x(a + b) - 7(a + b) = (a + b)(x - 7)$;
3. $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$;
4. $x^2 + 4x - 5 = x^2 + 5x - x - 5 = x(x + 5) - (x + 5) = (x + 5)(x - 1)$ sau altfel,
 $x^2 + 4x - 5 = x^2 + 4x + 4 - 9 = (x + 2)^2 - 3^2 = (x + 2 + 3)(x + 2 - 3) = (x + 5)(x - 1)$.

**Metode combinate**

Metodele prezentate anterior se pot aplica succesiv în cadrul aceluiași exercițiu.

Exemple

1. $a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$;
2. $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b)$;
3. $x^2 + 2x - 10 = x^2 + 2x + 1 - 11 = (x + 1)^2 - (\sqrt{11})^2 = (x + 1 + \sqrt{11})(x + 1 - \sqrt{11})$;
4. $x^2 + 2x\sqrt{2} + 1 = x^2 + 2x\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 1 = (x + \sqrt{2})^2 - 1^2 = (x + \sqrt{2} + 1)(x + \sqrt{2} - 1)$.

**Probleme rezolvate**

- 1 Demonstrează că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $n^3 + 3n^2 + 2n$ se divide cu 6.

Soluție $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2) = n[n(n + 1) + 2(n + 1)] = n(n + 1)(n + 2)$.

Concluzia se obține ținând seama că, dintre trei numere consecutive, unul este divizibil cu 3 și cel puțin unul este divizibil cu 2.

- 2 Determină câtul împărțirii lui $x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 - y^2$ la $x + y + \sqrt{3}$, unde x, y sunt numere reale cu proprietatea $x + y + \sqrt{3} \neq 0$.

Soluție $x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 - y^2 = (x + \sqrt{3})^2 - y^2 = (x + \sqrt{3} + y)(x + \sqrt{3} - y)$, deci câtul împărțirii este $x + \sqrt{3} - y$.

- 3 Știind că $a + b + c = 3$ și $a - b + c = 7$, calculează $a^2 - b^2 + c^2 + 2ac + 2b - 1$.

Soluție $a^2 - b^2 + c^2 + 2ac + 2b - 1 = (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 - 2b + 1) =$
 $= (a + c)^2 - (b - 1)^2 = (a + c + b - 1)(a + c - b + 1) = (3 - 1)(7 + 1) = 16$.

- 4 Determină valorile numărului natural n , pentru care $a = n^2 + 8n - 9$ este număr natural prim.

Soluție $a = n^2 + 8n - 9 = n^2 + 8n + 16 - 25 = (n + 4)^2 - 5^2 = (n + 4 + 5)(n + 4 - 5) = (n + 9)(n - 1)$. Pentru ca numărul a să fie prim, trebuie ca unul dintre factori (și anume cel mai mic) să fie egal cu 1, adică $n - 1 = 1$, de unde $n = 2$. Pentru $n = 2$, obținem $a = 11$, care este număr prim.



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME

**1** Scoate factor comun:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------|
| a) $3a - 3b$; | b) $3x^2 + 3$; |
| c) $9a - 6b$; | d) $12a^2 + 9$; |
| e) $3a^2 - 6ab + 9$; | f) $4x - 6y$; |
| g) $10a + 5b + 25$; | h) $xy + xy^2 - 3x$; |
| i) $x^2y + xy^2$; | j) $2a^2b + 3ab^2 - 5a^3b$; |
| k) $4a + 8a^2b - 12ab^3$; | |
| l) $a(x+1) + b(x+1) + c(x+1)$; | |
| m) $ab(x-1) - b^2(x-1)$; | n) $2(x+3) - 5(x+3)$; |
| o) $3x(1-x) + 4(1-x)$; | p) $x^3y^2 - 2xy^5 + x^2y$; |
| q) $(2x-5)(x+7) + (2x-5)(5x-3)$. | |

2 Descompune în factori prin metoda restrângerii unui pătrat:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $x^2 - 10x + 25$; | b) $x^2 + 8x + 16$; |
| c) $4x^2 + 4x + 1$; | d) $25x^2 + 10x + 1$; |
| e) $4x^2 - 20x + 25$; | f) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; |
| g) $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1$; | h) $5a^2 - 4a\sqrt{5} + 4$; |
| i) $5x^2 - 2xy\sqrt{10} + 2y^2$; | j) $a^2 + 16a + 64$; |
| k) $25a^2 - 20ab + 4b^2$; | l) $3a^2 + 2ab\sqrt{6} + 2b^2$; |
| m) $2a^4 + 2a^2\sqrt{2} + 1$; | n) $a^4 + 2a^3\sqrt{5} + 5a^2$. |

3 Descompune în factori prin metoda diferenței de pătrate:

- | | | |
|------------------|-----------------|--------------------|
| a) $x^2 - 5^2$; | b) $9 - x^4$; | c) $9x^2 - 4y^2$; |
| d) $27 - x^2$; | e) $8x^2 - 3$. | |

4 Descompune în factori:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $x^2 + 7x + 12$; | b) $x^2 + 7x + 6$; |
| c) $x^2 + 5x + 4$; | d) $x^2 + 12x + 20$; |
| e) $x^2 + 10x + 21$; | f) $x^2 + 11x + 28$; |
| g) $x^2 + 13x + 36$; | h) $x^2 + 12x + 32$; |
| i) $x^2 - 10x + 16$; | j) $x^2 - 10x + 24$; |
| k) $x^2 - 10x + 9$; | l) $x^2 - 7x + 10$; |
| m) $x^2 - 12x + 11$; | n) $x^2 - 11x + 24$; |
| o) $x^2 - 13x + 40$; | p) $x^2 - 11x + 30$; |

- | | |
|----------------------|----------------------|
| q) $x^2 + 9x - 10$; | r) $x^2 + 6x - 16$; |
| s) $x^2 + 8x - 33$; | t) $x^2 + 7x - 30$; |
| u) $x^2 - 4x - 5$; | v) $x^2 - 6x - 27$; |
| w) $x^2 - 5x - 36$; | x) $x^2 - 7x - 18$. |

5 Descompune în produse de doi factori:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) $a^4 + a^2 + 1$; | b) $a^4 + 1$; |
| c) $a^4 - a^2 + 1$; | d) $x^4 + 64$; |
| e) $x^4 + 4x^2 + 16$; | f) $a^4 + 9a^2 + 81$; |
| g) $x^2 + 3x + 2 + ax + a$; | h) $x^2 - 4x + 3 - bx^2 + b$. |

6 Produsul a două numere este $x^2 + 12x + 35$, iar unul din factori este $x + 5$. Află celălalt factor.**7** Descompune în factori $x^2 + 6x + 7$.**8** Aria unui dreptunghi este $x^2 + 8x + 13$, $x > 0$, iar una dintre dimensiuni este $x + 4 - \sqrt{3}$. Care este perimetrul dreptunghiului?**9** Arată că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

- | |
|--|
| a) $9^n + 4 \cdot 3^n + 4$, $n \in \mathbb{N}$; |
| b) $36^n - 6^{n+1} + 9$, $n \in \mathbb{N}$; |
| c) $(k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1$, $k \in \mathbb{Z}$; |
| d) $n(n+1)(n^2 + n - 4) + 4$, $n \in \mathbb{Z}$. |

10 Determină numerele naturale x și y , știind că:

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| a) $x^2 - 97 = y^2$; | b) $x^2 - 97^2 = y^2$. |
|-----------------------|-------------------------|

11 Suma dintre vârsta Corinei și cea a Ralucăi este 16 ani, iar diferența dintre pătratul vârstei Corinei și pătratul vârstei Ralucăi este 32 ani. Câți ani au cele două fete?**12** Descompune în factori:

- | |
|---|
| a) $a^2 + 2ab + b^2 + 5a + 5b$; |
| b) $x^2 - 2x + 1 + a(x-1)$; |
| c) $4a^2 + 4a + 1 + 2ax + x$; |
| d) $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 + 3x\sqrt{3} - 3$; |
| e) $(x+y)^2 + x^2 - y^2$; |



- f) $(2a-b)^2 - 4a^2 + b^2$; g) $x^2 + 8x + 16 - b^2$;
 h) $(3x-a^3)^2 - 18x^2 + 2a^6$;
 i) $(x-3)^2 - 7x + 21 - (x-3)(x+1) + a(x^2-9)$;
 j) $x^2 - 6x + 9 - a^2$; k) $2a^2 - 2b^2$;
 l) $3x^2 - 12$; m) $4x^2 - a^2 + 14x + 7a$;
 n) $3a^2 - 16$; o) $a^2 - 9b^2 - ax + 3bx$;
 p) $x^2 + 4x + 4 - b^2$; q) $a^2 - x^2 - 2x - 1$;
 r) $(x+5)^2 + 4x + 20$; s) $(5x-3)^2 - 25x^2 + 9$;
 t) $49x^2 + 14x + 1 + 35ax + 5a$;
 u) $(x-3)(x+7) + x^2 - 6x + 9$;
 v) $81x^2 - 18x + 1 - y^2$.

13 Demonstrează că numărul $a = (n+2)^3 - n - 2$ este multiplu de 3, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

14 a) Demonstrează că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, oricare ar fi numerele reale pozitive a și b .

b) Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, demonstrează că

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

c) Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, arată că

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc.$$

15 Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $a^4 + b^4 = c^4 + 2a^2b^2$, demonstrează că triunghiul este dreptunghic.

16 Arată că numărul $\frac{7^{4n} + 7^{2n} \cdot 6 + 9}{49^n + 3} - 3$ este pătratul unui număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

17 Determină $x, y \in \mathbb{R}$ dacă:

$$x^2 - 10x + 74 + 14y + y^2 \leq 0.$$

18 Determină numerele reale x și y care îndeplinesc condițiile:

a) $\sqrt{x^2 - 10x + 26} + \sqrt{y^2 + 4y + 13} = 4$;

b) $\sqrt{16x^2 - 24x + 13} + \sqrt{25y^2 - 60y + 40} \leq 4$.

19 Se consideră numărul

$$A = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1},$$

unde n este număr natural. Arată că A este număr natural impar.

20 Descompune în factori:

a) $(x+2) \cdot (x+3)^2 - 25(x+2)$;

b) $(2x-7)^2 - 9 \cdot (x+1)^2$;

c) $x^8 - 256$;

d) $4x^4 - 4x^2 + 1$;

e) $49x^4 - 14x^2 + 1 - 4y^2$;

f) $36 - x^2 + 2xy - y^2$;

g) $x^2(x^2 - 26) + 25$;

h) $4x^2 + 4x + 1 - 2y^2$.

21 Calculează cât mai simplu:

a) $2,7^2 + 2 \cdot 2,7 \cdot 3,3 + 3,3^2$;

b) $7,4^2 - 2 \cdot 7,4 \cdot 2,4 + 2,4^2$;

c) $6,7^2 + 2 \cdot 3,3 \cdot 6,7 + 3,3^2$;

d) $11,2^2 - 2 \cdot 7,2 \cdot 11,2 + 7,2^2$.

22 Dacă $a^2 - b^2 = 60$ și $a + b = 10$, află:

a) $25 \cdot (a-b)$;

b) a și b .

23 Știind că $x^2 + y^2 = 25$ și $x \cdot y = 12$, calculează $(x+y)^4$.

24 a) Determină numerele întregi a și b cu proprietatea $17 - 12\sqrt{2} = (a - b\sqrt{2})^2$.

b) Determină numerele întregi c și d cu proprietatea $7 + \sqrt{48} = (c + d\sqrt{3})^2$.

25 a) Verifică egalitatea $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

b) Determină numerele raționale p și q cu proprietatea $\sqrt{(2 + \sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3})} = p \cdot \sqrt{6} + q \cdot \sqrt{2}$.

26 a) Determină numerele întregi a și b care verifică egalitatea: $ab + 2a - 3b = 7$.

b) Determină numerele întregi x și y care verifică egalitatea: $15xy - 35x - 6y - 3 = 0$.

27 Arată că, dacă $a < b$ și $x < y$, atunci

$$ay + bx < ax + by.$$

28 Arată că numărul $(n^2 - 4) \cdot (n^3 - n)$ este divizibil cu 5, pentru orice număr natural n .

29 a) Determină valoarea minimă pentru expresia $4x^2 + 4x + 3, x \in \mathbb{R}$.

b) Determină valoarea maximă pentru expresia $30 - 10x - x^2, x \in \mathbb{R}$.

30 a) Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$3a^2 - 2a\sqrt{6} + 7b^2 + 2b\sqrt{35} + 7 = 0.$$

b) Determină $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât expresia

$$-3x^2 + 2x\sqrt{6} - 7y^2 - 2y\sqrt{35} - 7$$

ia valoarea maximă.

LECTIA 4

Frații algebrice

În algebră, folosim literele ca simboluri pentru numere reale, în diverse situații:

- pentru a prezenta, sub o formă generală, proprietăți valabile pentru o largă categorie de numere reale sau legi, reguli, formule din diverse domenii;
- pentru a efectua calcule cu numere necunoscute, a căror determinare revine la rezolvarea unor ecuații sau inecuații.



Expresii algebrice



Valoarea numerică a unei expresii algebrice

Definiții

- Numim *expresie algebrică* o expresie matematică care depinde de una sau mai multe variabile ce iau valori în mulțimi date.
- Dacă expresia algebrică este o fracție al cărei numitor este format din numere reale reprezentate prin litere (variabile), atunci expresia algebrică este o *fracție algebrică*.



NOTAȚII

O expresie algebrică se notează cu litere mari urmate de paranteze între care se scriu variabilele de care depinde aceasta. Prin urmare, o expresie algebrică care depinde de o singură variabilă x o putem nota cu $E(x)$, o expresie algebrică care depinde de două variabile a și b o putem nota prin $E(a, b)$ etc.

Exemple

1. În figura 1 este desenat un pătrat de latură $2x$ și un semicerc având ca diametru una dintre laturile pătratului. Aria porțiunii colorate este $4x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$.

Expresia matematică $4x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$ este o *expresie algebrică* depinzând de variabila $x \in (0, \infty)$. Putem pune în evidență acest lucru, notând expresia cu $A(x)$.

Relația $A(x) = 4x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$ permite calculul ariei colorate în figura 1 pentru orice valoare a lui $x > 0$.

Astfel, dacă $x = 3$, aria este $A(3) = 4 \cdot 3^2 - \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 36 - \frac{9\pi}{2}$. Numărul $A(3)$ reprezintă valoarea numerică a expresiei $A(x)$ pentru $x = 3$.

2. Într-o cutie se găsesc a bile albe și b bile negre. Probabilitatea ca la o extragere să obținem o bilă albă este $\frac{a}{a+b}$. Expresia matematică $\frac{a}{a+b}$ este o fracție algebrică, depinzând de variabilele $a, b \in \mathbb{N}^*$. Notăm expresia cu $P(a, b)$. Formula $P(a, b) = \frac{a}{a+b}$ permite calculul probabilității în cazuri particulare. Astfel, probabilitatea ca, dintr-o cutie cu 10 bile albe și 7 bile negre, să obținem la o extragere o bilă albă este $P(10, 7) = \frac{10}{10+7} = \frac{10}{17}$, reprezentând valoarea numerică a expresiei $P(a, b)$ pentru $a = 10$ și $b = 7$.



Figura 1

Definiție

Numim *valoare numerică* a unei expresii algebrice care depinde de una sau mai multe variabile numărul ce se obține prin înlocuirea variabililor cu valori numerice date.



Exemplu

Dacă $E(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, atunci pentru a calcula valoarea numerică a lui $E(x)$ pentru $x = 3$ se înlocuiește x cu valoarea 3 și obținem: $E(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 3 = 12$.

În calculele cu numere reale reprezentate prin litere, folosim proprietățile operațiilor cu numere reale, regulile de calcul cu puteri și radicali. De asemenea, ținem seama de convențiile privitoare la ordinea operațiilor și folosirea parantezelor.

⇒ **Condiții de existență pentru o fracție algebrică**

Precizarea valorilor variabilei (sau variabilelor) pentru care o fracție algebrică are sens este numită *stabilirea condițiilor de existență* pentru această fracție.

Fracția algebrică scriindu-se sub forma unui raport, trebuie pusă condiția ca expresia algebrică de la numitor să nu se anuleze pentru nicio valoare atribuită variabilelor date.

Exemple

1. Pentru fracția algebrică $E(x) = \frac{x}{x+1}$, trebuie pusă condiția $x+1 \neq 0$, adică $x \neq -1$.
Așadar, $E(x) = \frac{x}{x+1}$ are sens pentru orice valoare reală a lui x diferită de -1 .
2. Pentru $E(x, y) = \frac{x^3 + xy + y^2 + 2}{x^2 - 9y^2}$, trebuie pusă condiția de existență $x^2 - 9y^2 \neq 0$, adică $x \neq \pm 3y$.
Așadar, $E(x, y)$ are sens pentru orice valori reale x și y cu $x \neq \pm 3y$.

⇒ **Amplificarea și simplificarea fracțiilor algebrice**

Proprietăți

- Dacă înmulțim sau împărțim atât numărătorul, cât și numitorul unei fracții algebrice cu aceeași expresie diferită de zero, valoarea fracției nu se modifică.
- În cazul înmulțirii, operația se numește *amplificare*. ■ În cazul împărțirii, operația se numește *simplificare*.

Exemple

1. Amplificând fracția algebrică $\frac{x}{x-1}$ (unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) cu $x+2$, $x+2 \neq 0$, avem

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x}{x^2+x-2} \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$
2. Amplificând fracția algebrică $\frac{1}{a\sqrt{3}+b\sqrt{2}}$ (unde $a\sqrt{3}+b\sqrt{2} \neq 0$) cu $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, avem

$$\frac{1}{a\sqrt{3}+b\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}-b\sqrt{2}}{(a\sqrt{3}+b\sqrt{2})(a\sqrt{3}-b\sqrt{2})} = \frac{a\sqrt{3}-b\sqrt{2}}{3a^2-2b^2}, \text{ unde } a\sqrt{3} \pm b\sqrt{2} \neq 0.$$
3. Fracția algebrică $\frac{3x+3}{2x+2} = \frac{3(x+1)}{2(x+1)}$, unde $x \neq -1$ se simplifică prin $x+1$, obținând raportul $\frac{3}{2}$.
4. Fracția algebrică $\frac{3a^2-3b^2}{6a^2+12ab+6} = \frac{3(a^2-b^2)}{6(a^2+2ab+b^2)} = \frac{3(a-b)(a+b)}{6(a+b)^2}$, unde $a+b \neq 0$, se simplifică prin $3(a+b)$, obținând fracția algebrică $\frac{a-b}{2(a+b)}$.

**FIXARE****EXERSARE****CONSOLIDARE****PROBLEME**

1 Fie fracția algebrică $\frac{-3x+4}{x-3}$, $x \in D$, $D \subset \mathbb{R}$.

a) Calculează valoarea fracției algebrice pentru $x = 1$ și pentru $x = -2$.

b) Determină mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care fracția are sens.

2 Se consideră fracția algebrică $\frac{2x}{x^2+3x}$, $x \in D \subset \mathbb{R}$.

a) Calculează valoarea fracției algebrice pentru $x = 1$ și pentru $x = \sqrt{2}$.

b) Poți calcula valoarea fracției algebrice pentru $x = 0$ sau pentru $x = -3$?

3 Se consideră fracția algebrică $\frac{2x-3}{x}$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.

Amplifică această fracție, pe rând, cu:

a) x^2 , $x \neq 0$; b) $x+1$, $x \neq -1$;

c) $2x+3$, $x \neq -1, 5$.

4 Se consideră fracția $\frac{x-3}{x+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Amplifică această fracție, pe rând, cu:

a) x , $x \neq 0$; b) $x-3$, $x \neq 3$; c) $x+1$, $x \neq -1$.

5 Simplifică fracțiile algebrice:

a) $\frac{49x^3}{-7x}$, $x \neq 0$; b) $\frac{x^2+2x}{2x}$, $x \neq 0$;

c) $\frac{x^2-4}{x+2}$, $x+2 \neq 0$; d) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$;

e) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$; f) $\frac{4x^2-1}{1+4x+4x^2}$, $x \neq -\frac{1}{2}$;

g) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$, $x \neq \pm 1$;

h) $\frac{1-2x+x^2}{x^3-x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;

i) $\frac{ax+bx+a+b}{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

6 Arată că valoarea fracției $\frac{n^2+8n+15}{n+5}$ este număr natural, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

7 Determină numerele întregi $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$ pentru care valoarea fracției $\frac{3a+6}{a^2+3a+2}$ este număr întreg.

8 a) Arată că valoarea fracției algebrice $\frac{n^2+9n+14}{n+2}$ este număr natural, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Determină valorile lui $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ pentru care valoarea fracției $\frac{6n+6}{2n^2+5n+3}$ este număr întreg.

9 Amplifică fracțiile următoare, astfel încât ele să aibă același numitor:

a) $\frac{3}{5x}$, $\frac{2}{20x^2}$, $\frac{-3x+1}{2x^3}$, $x \neq 0$;

b) $\frac{2x}{x-2}$, $\frac{-3x}{x+2}$, $\frac{5x+1}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$;

c) $\frac{x+1}{x}$, $\frac{x}{x+1}$, $\frac{2x-1}{x^2+x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

10 Simplifică fracțiile algebrice următoare, astfel încât ele să aibă același numitor:

a) $\frac{x+1}{x^2-x-2}$, $\frac{x-2}{x^2-4x+4}$, $\frac{x+2}{x^2-4}$,
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, 2\}$;

b) $\frac{4x^2+4x}{x^2+2x}$, $\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}$, $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$,
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, -1\}$.

11 Efectuează:

a) $3x - (+2x) - (-3x) - (+4x)$;

b) $-6x - (-5x) + (+2x) - (+3x)$;

c) $-4y - (-6y) + (+4y) - (+3y)$;

d) $-10x^2 - (+3x^2) - (+2x^2) - (-4x^2)$;

e) $-4x^3 + (+2x^3) - (-7x^3) - (+3x^3)$;

f) $6xy - (-5xy) - (+8xy) + (-xy)$.

12 Desființează parantezele și redu termenii asemenea:

a) $(3x-2) - (x+3) + (2x+4) + 2x+3$;

b) $-(2x+3) + 5x + (4-2x) - (-x+3)$;

c) $6x - (2x+y) + (x-4y) - (2y-3)$;

d) $(2x^2+2x-4) - (x^2+3x-7) + (-4x^2+x-8)$;

e) $-(3x^2-2x+2) + (x^2-x-1) - (2x^2+x-4)$.

13 Dacă $a = (x+3)^2 + 2(x+3)(x-3) + (x-3)^2$, $x \in \mathbb{Z}$, atunci arată că numărul a este divizibil cu 4.



LECȚIA 5

Operații cu fracții algebrice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere)

⇒ Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează analog cu adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

- Dacă fracțiile au același numitor, atunci se aplică formula:

$$\frac{E}{G} \pm \frac{F}{G} = \frac{E \pm F}{G}$$

- Dacă fracțiile nu au același numitor, prin amplificări convenabile, le aducem mai întâi la același numitor.

Exemple

$$1. \frac{2a}{x-5} + \frac{4a}{x-5} = \frac{2a+4a}{x-5} = \frac{6a}{x-5}, x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}. \quad 2. \frac{x}{6} - \frac{x}{10} = \frac{5x}{30} - \frac{3x}{30} = \frac{5x-3x}{30} = \frac{2x}{30} = \frac{x}{15}.$$

$$3. \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3x-2}{2x+2} + \frac{x}{4} = \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3x-2}{2(x+1)} + \frac{x}{4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \text{ Numitorul comun este } 4(x+1).$$

Amplificăm prima fracție cu 4, a doua cu 2 și a treia cu $(x+1)$ și obținem

$$\frac{4(2x-1) - 2(3x-2) + x(x+1)}{4(x+1)} = \frac{8x-4-6x+4+x^2+x}{4(x+1)} = \frac{x^2+3x}{4(x+1)}.$$

- 4. Amplificăm prima fracție cu -1 și avem:

$$\frac{2}{3-x} + \frac{3}{x-3} = \frac{-2}{x-3} + \frac{3}{x-3} = \frac{-2+3}{x-3} = \frac{1}{x-3}, x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

- 5. Amplificăm fiecare fracție cu numitorul celeilalte, obținem:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1}{(x+2)(x+1)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}.$$

$$6. \frac{1}{a^2-4b^2} + \frac{1}{a^2+4ab+4b^2} = \frac{1}{(a-2b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)^2}, a^2-4b^2 \neq 0.$$

Numitorul comun este $(a-2b)(a+2b)^2$. Amplificând prima fracție cu $(a+2b)$ și pe cea de-a doua cu $(a-2b)$, obținem

$$\frac{a+2b+a-2b}{(a-2b)(a+2b)^2} = \frac{2a}{(a-2b)(a+2b)^2}.$$

⇒ Înmulțirea fracțiilor algebrice

Două fracții algebrice, $\frac{E}{F}$ și $\frac{G}{H}$ se înmulțesc astfel:

$$\frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H} = \frac{E \cdot G}{F \cdot H}$$

Cu alte cuvinte, pentru a înmulți două fracții algebrice, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei. Atunci când este posibil, descompunem numărătorii și numitorii în factori și efectuăm eventualele simplificări.

Exemple

$$1. \frac{x^3}{5x+10} \cdot \frac{30}{3x^2} = \frac{30x^3}{5(x+2) \cdot 3x^2} = \frac{2x}{x+2}, \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$$

$$2. \frac{x^2-7x+6}{x^2-36} \cdot \frac{x+6}{1-x^2} = \frac{(x-1)(x-6)}{(x-6)(x+6)} \cdot \frac{x+6}{-(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}, \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 1, 6\}.$$

⇒ Împărțirea fracțiilor algebrice

Considerăm fracțiile algebrice $\frac{E}{F}$ și $\frac{F}{E}$. Avem $\frac{E}{F} \cdot \frac{F}{E} = 1$. Spunem că $\frac{F}{E}$ este inversa fracției $\frac{E}{F}$ și scriem $\left(\frac{E}{F}\right)^{-1} = \frac{F}{E}$. Inversa unei fracții algebrice este definită doar pentru acele valori ale variabilelor care nu anulează nici numărătorul, nici numitorul fracției.

Exemplu

Inversa fracției $\frac{x}{x+1}$ unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ este $\frac{x+1}{x}$. La fel fracția algebrică $\frac{x}{x+1}$ cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ este inversa fracției $\frac{x+1}{x}$.

Pentru a împărți două fracții algebrice, se înmulțește prima fracție cu inversa celei de-a doua fracție. Deci:

$$\frac{E}{F} : \frac{G}{H} = \frac{E}{F} \cdot \frac{H}{G}$$

Exemple

- $\frac{x^2}{3} : \frac{x^2}{6} = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{6}{x^2} = 2$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.
- $\frac{3x-2x^2}{2x+2} : \frac{9-4x^2}{x^2-1} = \frac{x(3-2x)}{2(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(3-2x)(3+2x)} = \frac{x(x-1)}{2(2x+3)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1, 1, \frac{3}{2}\right\}$.
- Fracția dintre aria discului de rază x și aria triunghiului echilateral de latură x este

$$\frac{\frac{\pi x^2}{x^2\sqrt{3}}}{4} = \pi x^2 \cdot \frac{4}{x^2\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}.$$

⇒ Ridicarea la putere a fracțiilor algebrice

Pentru a ridica o fracție algebrică la o putere cu exponent întreg, folosim formulele:

$$\left(\frac{E}{F}\right)^n = \frac{E^n}{F^n}, \quad \left(\frac{E}{F}\right)^{-n} = \left(\frac{F}{E}\right)^n, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}$$

Exemple

- $\left(\frac{1}{2x}\right)^2 = \frac{1}{4x^2}$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.
- $\left(\frac{1}{2x}\right)^{-2} = (2x)^2 = 4x^2$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.
- $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-3} = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
- $(2x)^{-2} = \frac{1}{(2x)^2} = \frac{1}{4x^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\left(\frac{1}{3x}\right)^{-3} = (3x)^3 = 27x^3$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{-2} = \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.
- $\left(\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+4}\right)^{-1} = \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x+4}{x+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, -4\}$.
- $(x+2)^{-1} = \frac{1}{x+2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- $\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 = \frac{1}{(-2x)^2} = \frac{1}{4x^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\left(\frac{-1}{2x}\right)^{-2} = (2x)^2 = 4x^2$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\left(\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{-1}\right)^{-2} = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.



Probleme rezolvate

- 1 Determină valorile variabilelor pentru care au sens expresiile următoare. Scrie expresiile sub forma cea mai simplă:

$$a) E(x) = \left(\frac{x+3}{x-1} - \frac{x-2}{x+1} - \frac{6x}{x^2-1} \right) : \frac{1}{x-1};$$

$$b) E(a, b) = \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4a^2b^2}{b^2-a^2} \right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) \cdot \frac{1}{4ab+4};$$

$$c) E(x, y) = \left[\frac{(x-2y)^2 + 8xy}{(x+2y)^2 - 8xy} \right]^{-2} \cdot \left(\frac{x^2 + 2xy}{x^2 - 2xy} \right)^3.$$

Soluție a) Punem condițiile de existență: $x-1 \neq 0, x+1 \neq 0, x^2-1 \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$E(x) = \frac{(x+3)(x+1) - (x-2)(x-1) - 6x}{(x-1)(x+1)} : \frac{1}{x-1} =$$

$$= \frac{x^2 + x + 3x + 3 - x^2 + x + 2x - 2 - 6x}{(x-1)(x+1)} : \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \cdot (x-1) = 1.$$

b) Condițiile de existență sunt: $a \neq b, a \neq -b, a \neq 0, b \neq 0, ab \neq -1$.

$$E(a, b) = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2 + 4a^2b^2}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab} \cdot \frac{1}{4(ab+1)} = \frac{4ab + 4a^2b^2}{(a+b)(a-b)} \cdot$$

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \cdot \frac{1}{4(ab+1)} = \frac{4ab(1+ab)}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{(a+b)^2}{ab} \cdot \frac{1}{4(ab+1)} = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$c) E(x, y) = \left(\frac{x^2 - 4xy + 4y^2 + 8xy}{x^2 + 4xy + 4y^2 - 8xy} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2 + 2xy}{x^2 - 2xy} \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2 + 2xy}{x^2 - 2xy} \right)^3 = \left[\frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2} \right]^{-2} \cdot \left[\frac{x(x+2y)}{x(x-2y)} \right]^3,$$

deci condițiile de existență pentru $E(x, y)$ sunt:

$$x \neq 2y, x \neq -2y \text{ și } x \neq 0.$$

$$E(x, y) = \left[\frac{(x-2y)^2}{(x+2y)^2} \right]^2 \cdot \left(\frac{x+2y}{x-2y} \right)^3 = \frac{(x-2y)^4}{(x+2y)^4} \cdot \frac{(x+2y)^3}{(x-2y)^3} = \frac{x-2y}{x+2y}.$$

- 2 Fie expresia $E(x) = \frac{3x+2}{3x-1} : \left(1 - \frac{3}{9x^2-1} \right)$.

a) Calculează $E(0)$.

b) Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

c) Rezolvă ecuațiile $E(x) = 2$ și $E(x) = -2$.

Soluție a) $E(0) = \frac{3 \cdot 0 + 2}{3 \cdot 0 - 1} : \left(1 - \frac{3}{9 \cdot 0^2 - 1} \right) = (-2) : 4 = -\frac{1}{2}.$

$$b) E(x) = \frac{3x+2}{3x-1} : \frac{9x^2-4}{9x^2-1} = \frac{3x+2}{3x-1} : \frac{(3x-2)(3x+2)}{(3x-1)(3x+1)}.$$

Deci $E(x)$ nu este definită pentru $x \in \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$.

$$c) E(x) = \frac{3x+2}{3x-1} \cdot \frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{3x+1}{3x-2}.$$

Ecuațiile $E(x) = 2$ și $E(x) = -2$ trebuie rezolvate în

mulțimea $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$. Ecuația $E(x) = 2$ are soluția $x = \frac{5}{3}$.

Ecuația $E(x) = -2$ nu are soluții în mulțimea $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$.



**FIXARE****EXERSARE****CONSOLIDARE****PROBLEME****1** Efectuează:

- a) $\frac{7x}{9} + \frac{5x}{9}$; b) $\frac{4x+1}{3a} - \frac{4x}{3a}, a \neq 0$;
 c) $\frac{7}{36x^2} + \frac{7}{6x} - \frac{5}{x^2}, x \neq 0$; d) $\frac{5x}{6} - \frac{3x}{4} + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3}$;
 e) $\frac{5x}{x-2} - \frac{3x+5}{x-2}$; f) $4 + \frac{5}{2x}, x \neq 0$;
 g) $x + y + \frac{y^2}{x-y}, x \neq y$; h) $x + y + \frac{x^2}{y-x}, x \neq y$;
 i) $\frac{x}{x+1} - 1, x \neq -1$;
 j) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{3x+3}, x \neq -1$;
 k) $\frac{10}{6x} + \frac{x+2}{6x^2} - \frac{5}{3x^2}, x \neq 0$;
 l) $4 + \frac{5-8x}{2x}, x \neq 0$;
 m) $x + 1 + \frac{1}{x-1}, x \neq 1$;
 n) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$;
 o) $\frac{x^3+x^2}{x+1} - \frac{x^3-x^2}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$;
 p) $\frac{5x}{x-2} - \frac{4x}{x-2} + \frac{3x-5}{2-x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
 q) $\frac{-6}{x+3} + \frac{3x}{3-x} - \frac{3x^2-9}{x^2-9}, x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$.

2 a) Arată că:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{5}{x(x+5)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -5\}.$$

b) Calculează suma:

$$\frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{5}{7 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{5}{17 \cdot 22} + \frac{5}{22 \cdot 27}.$$

3 Efectuează, impunând condițiile de existență:

- a) $-\frac{16x}{9} \cdot \frac{-9}{x}$; b) $\frac{2x^2}{3y^4} \cdot \frac{y^5}{4x}$;
 c) $\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2} \cdot \frac{x+4}{x-4}$; d) $\frac{x^2-25}{(x-5)^2} \cdot \frac{2x+10}{x^2+10x+25}$.

4 Efectuează, impunând condițiile de existență:

- a) $\frac{a^3x}{3} : \frac{2a^2}{24x}$; b) $\frac{12x^2}{4} : 2x^2$;
 c) $\frac{x^2-1}{x^2-4} : \frac{x-1}{x-2}$; d) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4} : \frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$.

5 Un triunghi echilateral și un pătrat au perimetre egale. Calculează fracția dintre:

- a) latura triunghiului echilateral și latura pătratului;
 b) aria triunghiului echilateral și aria pătratului.

6 Efectuează, impunând condițiile de existență:

- a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}$; b) $\left(-\frac{2}{3x}\right)^2$;
 c) $\left(\frac{2xy^2}{3a}\right)^{-2}$; d) $\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)^{-2} : \frac{x^2-16}{4x^2-9}$.

7 Efectuează, impunând condițiile de existență:

- a) $\left(\frac{x^2+4}{4x} - 1\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$;
 b) $\left(\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2}\right)$.

8 Efectuează:

- a) $\frac{x-y}{x} - \frac{x+y}{y} - 2, x, y \in \mathbb{R}^*$;
 b) $\frac{a^2+a}{a+1} - \frac{a^2-a}{a-1}, a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$;
 c) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$;
 d) $\frac{x^2+4}{2x} - \frac{x^2}{2x+4} - \frac{x^2}{x^2+2x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$;
 e) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$;
 f) $\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{3-x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

9 a) Arată că: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

b) Calculează suma:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

10 Arată că sumele următoare sunt constante:

- a) $\frac{3}{x-3} + \frac{x}{3-x}, x \neq 3$;
 b) $\frac{5x+1}{x-2} + \frac{3x+5}{2-x}, x \neq 2$;
 c) $\frac{x^2-2x+3}{2x-1} + \frac{x^2+2x+1}{1-2x}, x \neq \frac{1}{2}$.



- 11** Efectuează înmulțirile, impunând condițiile de existență:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2}{3} \cdot \frac{6}{x^2}; & \text{b) } \frac{5a^2}{2} \cdot \left(-\frac{6}{a}\right); & \text{c) } \frac{10a^2}{12xy^2} \cdot \frac{36y^2}{5a}; \\ \text{d) } -4x \cdot \frac{5}{x^3} \cdot \frac{x^2}{4}; & \text{e) } \frac{x^2-9}{x-3} \cdot \frac{1}{x+3}; \\ \text{f) } \frac{x^2-x}{x^2+x} \cdot \frac{2x^2+2x}{x}; & \text{g) } \frac{a^2-4}{a^2-a} \cdot \frac{a-1}{a^2+2a}. \end{array}$$

- 12** Efectuează împărțirile, impunând condițiile de existență:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{5x}{6y} : \frac{2x}{12y}; & \text{b) } \frac{-4x^6}{5y^2} : \frac{6x}{8y^2}; \\ \text{c) } \frac{x-1}{x+2} : \frac{x+1}{2x+4}; & \text{d) } \frac{x^2+x}{x^2-16} : \frac{x+1}{x-4}; \\ \text{e) } \frac{x^2-4x+4}{y^2+y} : \frac{x^2-4}{1+y}; & \text{f) } \frac{x^2-1}{9-4x^2} : \frac{1-x^2}{3x+2x^2}. \end{array}$$

- 13** Efectuează, impunând condițiile de existență:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left(\frac{1}{3x}\right)^{-1}; & \text{b) } \left(\frac{2x}{3}\right)^3; & \text{c) } \left(\frac{x}{x-3}\right)^{-2}; \\ \text{d) } \frac{x-1}{x+1} : \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}; & \text{e) } \frac{x-1}{x+2} : \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}. \end{array}$$

- 14** Efectuează, impunând condițiile de existență:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2}\right) : \frac{2-5x}{x^2-4}; \\ \text{b) } \left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4}\right) : \frac{2x+6}{x^3-4x}; \\ \text{c) } \left(\frac{4}{1+x} + \frac{4x}{1-x} + \frac{8x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}\right); \\ \text{d) } \frac{x-1}{4} \cdot \left[\frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+4} \cdot \left(\frac{2x+3}{x-1} - 1\right)\right]. \end{array}$$

- 15** Se consideră $E(x) = \frac{x^4+8x^2-9}{x^3-x}$.

- a) Simplifică, punând condițiile de existență.
- b) Arată că $E(x) \geq 6$, pentru orice $x \in (1, \infty)$.
- c) Determină $x \in \mathbb{Z}$, pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

- 16** Alina îi propune colegei sale Raluca un test de inteligență și o roagă să efectueze pașii pe care ea îi dictează:

- ✓ Alege un număr diferit de 0 și 2 pe care-l numim număr secret.
- ✓ Calculează inversul acestui număr. Reținem acest rezultat.
- ✓ Împarte pe 2 la numărul secret micșorat cu 2. Reținem acest al doilea rezultat.
- ✓ Scade 1 din numărul secret, ridică rezultatul la pătrat, apoi scade acest rezultat din 1 și împarte 4 la rezultatul final. Acesta este al treilea număr pe care îl reții.
- ✓ Adună cele trei numere obținute la pașii anteriori.

- ✓ Spune-mi rezultatul și eu îți spun care este numărul tău secret!

Cum a aflat Alina numărul secret?

- 17** Se consideră $E(x) = \frac{2x^2+16x+32}{3x^2-48}$:

$$: \left[\left(\frac{2x}{x+2} + \frac{2x}{6-3x} + \frac{8x}{x^2-4} \right) : \frac{2x-8}{x-2} \right].$$

- a) Pune condițiile de existență pentru $E(x)$.
- b) Adu $E(x)$ la forma cea mai simplă.
- c) Determină $x \in \mathbb{Z}$, pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

- 18** Fie $E(x) = \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{x-1} \right) : \frac{x^2+1}{x^2-1} : \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

- a) Determină valorile lui x pentru care $E(x)$ este definită (are sens).
- b) Arată că $E(x)$ poate fi scrisă sub forma $\frac{3-x}{x+1}$.
- c) Determină $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $E(x) \geq 0$.
- d) Determină $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât $E(x) \in \mathbb{N}$.

- 19** Fie $E(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2-9} - \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} - \frac{x+3}{x^2+6x+9}$.

- a) Determină valorile lui x pentru care expresia are sens și arată că $E(x) = \frac{7}{x^2-9}$.
- b) Determină $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $E(a) \in \mathbb{Z}$.

- 20** Adrian îi propune colegului său de bancă Ionuț să aleagă un număr real diferit de 1 și -1 pe care el să nu-l știe și apoi să parcurgă următorii pași:

- ✓ Scade 1 din pătratul numărului ales.
- ✓ Împarte rezultatul obținut la pasul anterior la numărul ales mărit cu 1.
- ✓ Înmulțește rezultatul obținut anterior cu inversul numărului micșorat cu 1.

În final, Adrian îi spune lui Ionuț că, dacă a rezolvat corect, trebuia să obțină rezultatul 1.

Cum a calculat Adrian rezultatul final?

Propune și tu colegului (colegei) de bancă un test asemănător.

- 21** Dănuț vrea să facă un truc cu cărțile de joc și îl roagă pe prietenul lui, Radu, să efectueze următorii pași:

- ✓ Alege o carte de pe masă și numărul de pe această carte va fi numărul tău secret.
- ✓ Calculează pătratul sumei dintre acest număr și 1.
- ✓ Calculează pătratul diferenței dintre numărul secret și 1.
- ✓ Calculează diferența rezultatelor obținute anterior, spune-mi rezultatul și îți comunic care este numărul tău secret.

Cum a calculat Dănuț numărul secret?



LECTIA 6

Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Definiții

- O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$ se numește *ecuație de gradul al doilea în necunoscuta x* .
- Numerele a, b și c se numesc *coeficienții* ecuației.
- Valorile lui x care înlocuite în ecuație conduc la propoziții adevărate se numesc *soluții ale ecuației*.

Observație

Rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ în care $a = 0$ se reduce la rezolvarea ecuației $bx + c = 0$, care este cunoscută.



Rezolvarea ecuației de gradul al doilea în cazuri particulare

Ecuatii de forma $ax^2 + bx = 0$ (cazul $c = 0$)

Ecuația $ax^2 + bx = 0$ (unde $a \neq 0$) este echivalentă cu $x(ax + b) = 0$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple

1. $5x^2 + 10x = 0$ echivalent cu $5x(x + 2) = 0$, de unde $x = 0$ sau $x + 2 = 0$. Se obțin soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = -2$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{0, -2\}$.
2. $x^2 - \sqrt{2} \cdot x = 0$ echivalent cu $x(x - \sqrt{2}) = 0$, de unde $x = 0$ sau $x - \sqrt{2} = 0$. $S = \{0, \sqrt{2}\}$.

Ecuatii de forma $ax^2 + c = 0$ (cazul $b = 0$)

Ecuația $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) este echivalentă cu $ax^2 = -c$ sau $x^2 = d$, unde $d = -\frac{c}{a}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 = d$, este $S = \begin{cases} \{-\sqrt{d}, \sqrt{d}\} & \text{dacă } d > 0 \\ \{0\} & \text{dacă } d = 0 \\ \text{Ecuația nu are soluții reale} & \text{dacă } d < 0. \end{cases}$

Exemple

1. $x^2 = 9$, echivalent cu $x \in \{-3, 3\}$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-3, 3\}$.
2. $x^2 = 5$, echivalent cu $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.
3. $x^2 = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \{0\}$.
4. Ecuația $x^2 = -36$ nu are soluție, pentru că $x^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar $-36 < 0$. Deci nu există $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 = -36$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \emptyset$.
5. $2x^2 - 50 = 0$, echivalent cu $x^2 = 25$, deci $S = \{-5, 5\}$.
6. $81x^2 - 4 = 0$, echivalent cu $x^2 = \frac{4}{81}$, deci $S = \left\{-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right\}$.
7. $-7x^2 - 2 = 0$, echivalent cu $x^2 = -\frac{2}{7}$, deci $S = \emptyset$.

**Formulă pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea**

Vom deduce o formulă care permite determinarea soluțiilor oricărei ecuații de gradul al doilea. Pentru aceasta vom considera mai întâi următoarele situații:

Exemple

- $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Pentru a pune în evidență un pătrat perfect, înmulțim ambii membri ai ecuației cu 8 și obținem ecuația echivalentă $16x^2 - 24x + 8 = 0$, echivalent cu $16x^2 - 24x + 9 - 1 = 0$.
Deci $(4x - 3)^2 = 1$, de unde $4x - 3 = 1$ sau $4x - 3 = -1$. Obținem $S = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.
- $x^2 - 3x + 2,25 = 0$, echivalent cu $4(x^2 - 3x + 2,25) = 0$, de unde $4x^2 - 12x + 9 = 0$ sau $(2x - 3)^2 = 0$.
Obținem $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
- $x^2 + 2x + 3 = 0$, echivalent cu $x^2 + 2x + 1 = -2$, de unde $(x + 1)^2 = -2$. Ecuația nu are soluții reale, adică în $\mathbb{R}$, $S = \emptyset$.

Din aceste exemple, deducem:

REȚINE!

O ecuație de gradul al doilea poate avea două soluții reale și diferite sau două soluții reale și egale, dar poate să nu aibă nicio soluție reală.

**Deducerea formulei de rezolvare a unei ecuații de gradul al doilea**

Considerăm ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$. Pentru a pune în evidență un pătrat perfect, înmulțim ecuația cu $4a$ și obținem ecuația echivalentă.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0, \text{ echivalent cu } 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0. \text{ Deci } (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Definiție

Numărul $b^2 - 4ac$ se numește discriminantul ecuației și se notează cu litera Δ (se citește *delta*) din alfabetul grecesc.

Notând $2ax + b = y$, obținem ecuația $y^2 = \Delta$, având ca necunoscută pe y . Existența soluțiilor acestei ecuații (deci și a ecuației inițiale) depinde de semnul discriminantului.

- Dacă $\Delta > 0$, obținem $y = \pm \sqrt{\Delta}$, adică $2ax + b = \pm \sqrt{\Delta}$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. În concluzie, ecuația are în acest caz două soluții reale și distincte: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_1 \neq x_2$.
- Dacă $\Delta = 0$, obținem $y = 0$, adică $2ax + b = 0$, de unde $x = \frac{-b}{2a}$. În acest caz $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Spunem că ecuația are două soluții egale.
- Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are nicio soluție reală.

Observație

În cazul $\Delta = 0$, formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ rămâne adevărată; obținem în acest caz soluțiile $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.



REȚINE!

Algoritmul de rezolvare a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \neq 0$ este următorul:

- Se calculează discriminantul ecuației $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Dacă $\Delta \geq 0$, soluțiile sunt date de formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - Dacă $\Delta > 0$, soluțiile sunt distincte (diferite).
 - Dacă $\Delta = 0$, soluțiile sunt egale, și anume $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale.

**Probleme rezolvate**

- 1** Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; c) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

Soluție a) $a = 3, b = 7, c = 2$. $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 > 0$. Ecuația are două soluții reale diferite:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm 5}{6}. \text{ Rezultă } x_1 = -2 \text{ și } x_2 = -\frac{1}{3}. S = \left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}.$$

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0, a = 4, b = -4, c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0. \text{ Ecuația are două soluții reale egale } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}.$$

c) $x^2 - 2x + 3 = 0, a = 1, b = -2, c = 3$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0. \text{ Rezultă că ecuația nu are soluții reale, adică } S = \emptyset.$$

- 2** Rezolvă prin două metode ecuația $x^2 + x(\sqrt{7} + \sqrt{2}) + \sqrt{14} = 0$.

Soluție Avem $a = 1, b = \sqrt{2} + \sqrt{7}, c = \sqrt{14}$, deci $\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{14} = 7 + 2\sqrt{14} + 2 - 4\sqrt{14} = 7 - 2\sqrt{14} + 2 = (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$. Obținem $x_{1,2} = \frac{-(\sqrt{7} + \sqrt{2}) \pm (\sqrt{7} - \sqrt{2})}{2}$, de unde $x_1 = -\sqrt{7}$ și $x_2 = -\sqrt{2}$.

Altă metodă se bazează pe descompunerea în factori. Avem:

$$x^2 + x(\sqrt{7} + \sqrt{2}) + \sqrt{14} = x^2 + x\sqrt{7} + x\sqrt{2} + \sqrt{14} = x(x + \sqrt{7}) + \sqrt{2}(x + \sqrt{7}) = (x + \sqrt{7})(x + \sqrt{2}).$$

Ecuația se scrie $(x + \sqrt{7})(x + \sqrt{2}) = 0$, deci $x + \sqrt{7} = 0$ sau $x + \sqrt{2} = 0$, de unde $x_1 = -\sqrt{7}$ și $x_2 = -\sqrt{2}$.

- 3** Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, cu soluțiile reale x_1 și x_2 .

a) Arată că $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

b) Folosind rezultatul de la punctul a), demonstrează că are loc descompunerea:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

c) Descompune în factori expresia $x^2 - 5x + 6$.

Soluție a) Soluțiile x_1 și x_2 fiind reale, au forma $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Atunci $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$ și $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

b) Din punctul a), în expresia $ax^2 + bx + c$ putem să înlocuim $b = -a(x_1 + x_2)$, respectiv $c = ax_1 x_2$.

$$\text{Atunci: } ax^2 + bx + c = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1 x_2 = a(x^2 - x \cdot x_1 - x \cdot x_2 + x_1 x_2) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

c) Pentru a descompune în factori expresia $x^2 - 5x + 6$, rezolvăm mai întâi ecuația atașată, și anume: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Se obțin soluții reale $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.

Folosind punctul b), are loc descompunerea: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Comentariu

Relațiile stabilite la punctul a) poartă numele de *Relațiile lui Viète*.





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



1 Copiază și completează tabelul:

Ecuția $ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$2x^2 - 5x - 2 = 0$			
$2,5x^2 - 3x = 0$			
$-x^2 + 4x - 2 = 0$			
$2x - x^2 = 0$			
$2 - 3x^2 = 0$			
	1	-1	-2
	-4	4	0
	$\sqrt{2}$	0	-1
	-1	2	-3

2 Se dă mulțimea $A = \{\sqrt{2}; 1, 2; -3; -1\}$. Precizează care dintre elementele mulțimii A sunt soluții ale ecuațiilor:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - x - 6 = 0$; c) $x^2 - x = 0$.

3 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 9 = 0$; b) $x^2 - 4 = 0$; c) $x^2 = 0$;
 d) $x^2 = -7$; e) $x^2 = 8$; f) $4x^2 - 16 = 0$;
 g) $5x^2 = 10$; h) $\sqrt{2}x^2 = 24\sqrt{2}$;
 i) $6x^2 = -1930$; j) $x^2 - 40x = 0$;
 k) $9x^2 + 6x = 0$; l) $20x^2 + 2\sqrt{2}x = 0$.

4 Stabilește numărul elementelor fiecăreia dintre mulțimile:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 4x + 2 = 0\}$;
 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$;
 c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 4x - 1 = 0\}$;
 d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$.

5 Determină mulțimile:

a) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 - 1 = 0\}$;
 b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$;

c) $\{x \in \mathbb{N} \mid 36 - x^2 = 0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 3 = 0\}$;

e) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 + x = 0\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$.

6 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 9x + 14 = 0$; b) $x^2 - 17x + 30 = 0$;

c) $x^2 - 15x + 150 = 0$; d) $5x^2 + 14x - 3 = 0$;

e) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

f) $(x+2)^2 + (x+3)^2 = 10x + 13$;

g) $(x-2)^2 + 2x^2 = 4x + 7$; h) $\frac{x+3}{x+4} = \frac{1-x}{x-2}$;

i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$.

7 Determină $a \in \mathbb{R}$, știind că ecuația $(a-1)x - 2 = 0$ are soluția $x = a$.

8 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile următoare:

a) $x^2 = 100$; b) $x^2 + 100 = 0$;

c) $9x^2 - 1 = 0$; d) $x^2 - \sqrt{3}x = 0$;

e) $-7x + x^2 = 0$; f) $4x = 2\sqrt{3}x^2$.

9 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile următoare:

a) $49x^2 - 14x + 1 = 0$; b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

c) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;

d) $x^2 + (x+3)^2 - (x+4)^2 = -4(x+1)$;

e) $25x^2 - 24x - 1 = 0$; f) $2x^2 - 7x + 5 = 0$;

g) $6x^2 + x - 1 = 0$; h) $\frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{5x}$;

i) $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2x^2-3x+1}$.

10 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(2x-5)(3x-7) = 0$; b) $(4-x)(x+\sqrt{2}) = 0$;

c) $x(x-2) - 3(x-2) = 0$; d) $x(x+5) = 3(x-5)$;

e) $5x^2 - 2x\sqrt{5} + 1 = 0$; f) $x^2 - x + \pi - \pi^2 = 0$;

g) $x^2 + x(1-\pi) - \pi = 0$;

h) $x^2\sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 1 = 0$.

11 Află valorile lui m și rezolvă ecuația $x^2 + m^2x + 3 = 0$, știind că o rădăcină este -1 .



LECTIA 7

Aplicații ale ecuației de gradul al II-lea în rezolvarea unor probleme practice

Prezentăm în continuare câteva tipuri de probleme practice a căror rezolvare se face cu ajutorul ecuației de gradul al II-lea.

- 1** Aria unui triunghi dreptunghic este de 14 cm^2 , iar diferența catetelor este de 3 cm. Calculează lungimile catetelor.

Soluție Notăm una dintre catete cu x , deci cealaltă catetă este $x+3$. Ecuația problemei este:

$$\frac{x(x+3)}{2} = 14 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0.$$

Rădăcinile ecuației sunt 4 și -7 . Cum x este lungimea unui segment, avem $x > 0$, deci lungimile catetelor sunt 4 cm și 7 cm.

- 2** Se consideră în spațiu n puncte, astfel încât oricare trei dintre ele sunt necoliniare. Unind punctele două câte două în toate modurile posibile, se obțin 120 de drepte. Află numărul n .

Soluție Notăm punctele cu $A_1, A_2, \dots, A_n$. Dreptele distincte obținute unind punctele două câte două în toate modurile posibile sunt:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1A_2, & A_1A_3, & A_1A_4, & \dots & A_1A_{n-1}, & A_1A_n, \\ A_2A_3, & A_2A_4, & \dots & A_2A_{n-1}, & A_2A_n, \\ A_3A_4, & \dots & A_3A_{n-1}, & A_3A_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-2}A_{n-1}, & A_{n-2}A_n, \\ A_{n-1}A_n. \end{array}$$

Deci numărul dreptelor este

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Putem justifica și altfel:

Fiecare dintre cele n puncte se unește cu fiecare dintre celelalte $n-1$ puncte; $n(n-1)$ reprezintă dublul numărului de drepte (pentru că fiecare dreaptă a fost numărată de două ori). Deci numărul dreptelor este $\frac{n(n-1)}{2}$. Ecuația problemei este $\frac{n(n-1)}{2} = 120$, având soluțiile 16 și -15 . Cum $n \in \mathbb{N}$, răspunsul problemei este $n = 16$.

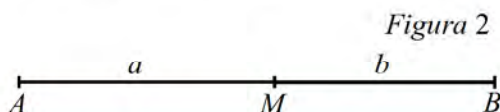
- 3** Există un poligon care să aibă 30 de diagonale?

Soluție Notăm cu n numărul laturilor unui poligon, $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Fiecare dintre cele n vârfuri este unit cu $n-3$ vârfuri (pentru că dintre cele $n-1$ vârfuri diferite de vârful considerat, două sunt alăturate acestuia, deci nu formează diagonale).

Produsul $n(n-3)$ reprezintă dublul numărului diagonalelor (pentru că fiecare diagonală a fost numărată de două ori). Rezultă că numărul diagonalelor poligonului cu n laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$. Rezolvând ecuația $\frac{n(n-3)}{2} = 30$, găsim $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{249}}{2}$ care nu sunt numere naturale. Deci nu există niciun poligon cu 30 de diagonale.

- 4** Punctul M împarte segmentul AB în două părți AM și MB , astfel încât $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$. Calculează raportul $\frac{AM}{MB}$.

Soluție Notăm $AM = a, MB = b$ și $x = \frac{AB}{AM}$, deci $x = \frac{a}{b}$ (vezi figura 2).



Relația $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$ se scrie $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ echivalent cu $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, de unde $1 + \frac{1}{x} = x$. Deci $x^2 - x - 1 = 0$. Soluțiile sunt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cum $x > 0$, răspunsul problemei este $\frac{AM}{MB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

PROIECT

Numărul de aur



PLANUL PROIECTULUI

MATERIALE NECESARE:

Planșe A3, carioci.



REALIZAREA PROIECTULUI:

- Împărțiți clasa în trei echipe de elevi.
- Membrii fiecărei echipe vor realiza pe o planșă A3 sarcinile de lucru primite.

SARCINI DE LUCRU:

Folosind internetul, găsiți diverse domenii unde este folosit numărul de aur. Informațiile vor fi scrise pe o planșă, însoțite de imagini reprezentative, și vor fi prezentate întregii clase de un reprezentant al fiecărei echipe.

Prezentare generală

Numărul $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este numit *numărul de aur*, se notează cu φ și se citește „fi”. Proporția $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ este numită *proporția de aur* sau *proporția divină*. Numărul de aur joacă un rol important în matematică, dar este prezent atât în natură, în alcătuirea ființelor vii, cât și în domeniul creației umane: în pictură, sculptură, arhitectură. Proporția de aur existentă între părțile componente ale unei opere de artă îi conferă acesteia echilibru, armonie și frumusețe.

Fișă de apreciere a portofoliului
sau a prezentării

Criterii/Aspectul vizat	Da	Nu	Parțial
A utilizat termenii cheie.			
Sursele de informare sunt relevante.			
A prezentat materiale la timpul stabilit.			
Originalitatea prezentării.			
Interdisciplinaritatea.			
Concluziile, reflecția personală.			

Fișă de observare sistematică a activității
și comportamentului elevilor

Atitudinea față de activitate/Aspectul vizat	Da	Nu	Parțial
Manifestă interes și plăcere față de activitate.			
Urmează pașii indicați.			
Cere ajutor când are nevoie.			
Utilizează materialele necesare și le împarte cu ceilalți.			
Are capacitatea de a lua decizii.			
Manifestă toleranță și acceptă punctele de vedere diferite de cele proprii.			
Își asumă responsabilități în timpul activității.			
Realizează sarcina dată până la capăt și participă la realizarea produsului final.			



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Robert și Vlad au vârstele exprimate prin numere naturale impare consecutive. Câți ani are fiecare, știind că produsul vârstelor celor doi copii este egal cu 255?
- 2 O grădină are formă dreptunghiulară. Știind că lungimea grădinii este cu 3 m mai mare decât dublul lățimii, iar aria grădinii este egală cu 495 m^2 , determină câți metri de sârmă sunt necesari pentru a împrejmuia grădina.
- 3 O grădină dreptunghiulară $ABCD$ are $AB = (3x + 2) \text{ m}$ și $BC = (x + 25) \text{ m}$, $x > 0$. În interiorul grădinii se află o piscină $MNPQ$, sub formă de pătrat, cu $MN = x \text{ m}$, restul suprafeței grădinii fiind acoperită cu gazon. Știind că aria suprafeței acoperite cu gazon este egală cu 1020 m^2 , determină x .
- 4 Înălțimea unui triunghi este mai mare decât baza lui cu 10 cm, iar aria triunghiului este de 468 cm^2 . Determină baza și înălțimea triunghiului.
- 5 Un triunghi dreptunghic are perimetrul de 56 cm, iar una dintre catete este cu 1 cm mai mică decât ipotenuza. Calculează lungimile laturilor.
- 6 În figura 3, $MN \parallel BC$. Află valoarea lui x .

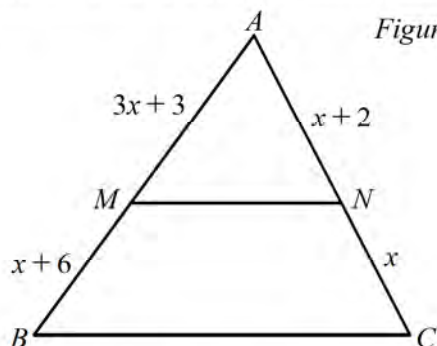
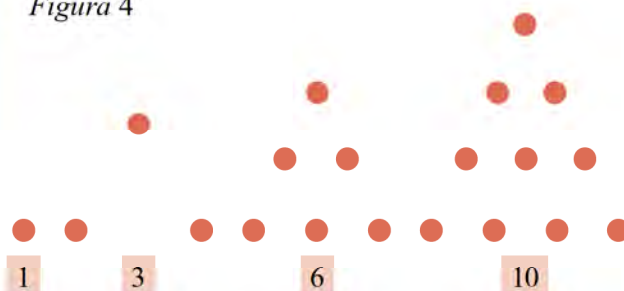


Figura 3

- 7 Determină valorile lui $a \in \mathbb{R}$, știind că distanța de la originea sistemului cartezian la punctul $A(a, a + 2)$ este 10.
- 8 Determină numărul laturilor unui poligon, știind că are 44 de diagonale.

- 9 Mulțimile A și B sunt disjuncte. Știind că $A \cup B$ are 15 elemente, iar $A \times B$ are 44 de elemente, stabilește câte elemente are fiecare dintre mulțimile A și B .
- 10 Numerele 1, 3, 6, 10, ... au fost numite de Pitagora „numere triunghiulare”, deoarece pot fi reprezentate sub forma următoare:

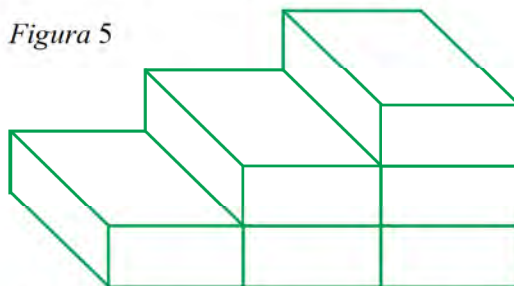
Figura 4



Ce loc ocupă în șirul numerelor triunghiulare (așezate în ordine crescătoare), numărul 136?

- 11 O scară este alcătuită din paralelipipede dreptunghice de dimensiuni egale (vezi figura 5). Câte trepte are o astfel de scară, dacă pentru construirea ei s-au folosit 36 de paralelipipede?

Figura 5



- 12 Produsul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este 48 cm^2 , iar ipotenuza este de 10 cm. Determină lungimile catetelor.
- 13 Perimetrul unui dreptunghi este de 70 cm, iar diagonala sa are lungimea egală cu 25 cm. Determină aria dreptunghiului.
- 14 Suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu 35 cm, iar aria triunghiului este egală cu 150 cm^2 . Determină lungimile celor două catete.

PROBLEME RECAPITULATIVE



1 Rezolvă ecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $(x+2)(x+3) - (x+1)(x+4) = x^2$;

b) $(x+\sqrt{2})^2 + (x-\sqrt{2})^2 = 3x^2$;

c) $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{3}{x^2-x+1}$;

d) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = 0$;

e) $(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 1 = 0$.

2 Dacă luăm la întâmplare un număr întreg din intervalul $(-\sqrt{15}, \sqrt{50})$, care este probabilitatea ca acesta să verifice ecuația $x^2 + 5x + 4 = 0$?

3 Lungimea unui dreptunghi este mai mare decât lățimea cu 8 cm, iar aria este de 308 cm^2 . Determină dimensiunile dreptunghiului.

4 Determină valorile numărului real m , știind că distanța de la punctul $P(m-3; m+4)$ la originea reperului cartezian xOy este egală cu 5.

5 Demonstrează că numărul $\sqrt{2^{2n} + 2^{n+1} + 1}$ este natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

6 Demonstrează că, pentru orice numere reale a, b, x, y are loc egalitatea:

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2).$$

7 a) Scrie ca produs de doi factori $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

b) Scrie ca produs de patru factori $(ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$.

8 Calculează:

a) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$;

b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

9 Demonstrează că, dacă $\frac{2x+3y}{3x-y} = \frac{2y+3x}{3y-x}$, atunci $|x| = |y|$.

10 Considerăm expresia

$$E(x) = \left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 + \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 - 2 \right] \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right).$$

a) Determină valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens.

b) Adu $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Rotunjește la zecimi numărul $E(\sqrt{2}-1)$.

d) Află valorile lui $x \in \mathbb{Z}$, pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

11 Demonstrează că, oricare ar fi a, b, c numere reale are loc egalitatea:

$$(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a+b+c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

12 Verifică egalitatea:

$$\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} = 4.$$

13 Demonstrează că, dacă x, y sunt numere reale strict pozitive și $x^2 + y^2 + xy = 3$, atunci $x + y \leq 2$.

14 Laturile unui triunghi au lungimile

$$a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{2} + \sqrt{3}, c = \sqrt{6} - 1.$$

Stabilește natura triunghiului.

15 Fie ecuația $mx^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$, unde m este un număr real diferit de zero.

a) Rezolvă ecuația pentru $m = 2$.

b) Determină valoarea numărului real m , astfel încât $x = 3$ să fie soluție a ecuației.

c) Arată că pentru orice m , număr real diferit de zero, ecuația are o soluție număr întreg.

16 Știind că $A = 100^2 + 200^2 + 300^2 + \dots + 1900^2$ și $B = 99 \cdot 101 + 199 \cdot 201 + 299 \cdot 301 + \dots + 1899 \cdot 1901$, calculează $A - B$.

17 Se consideră $a = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$,
 $b = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{2007}-\sqrt{2009})(\sqrt{2007}+\sqrt{2009})$.
 Calculează $\frac{a}{b}$ și $(b+7)^{\frac{a}{b}}$.

18 Se dă expresia

$$E(x) = (x+3) \cdot \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}, x \in D \subset \mathbb{R}.$$

a) Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ are sens.

b) Calculează $E(1) + E(5)$.

c) Determină valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

19 Se consideră expresia

$$E(x) = \left(\frac{2x}{x+1} + 2 \right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2} \right), x \in D \subset \mathbb{R}.$$

a) Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

b) Calculează $E(2)$ și $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Arată că $E(x) = \frac{2x-2}{2x-1}$.

d) Determină valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

20 Se consideră

$$E(x) = \left[\frac{4}{4-x^2} + \left(2 + \frac{x-2}{2} \right) : \left(\frac{x+2}{2} - 2 \right) \right] : (x^3 + 4x), \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 0, 2\}.$$

a) Adu $E(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Dacă $E(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$, calculează $E(3) + E(4) + E(5) + \dots + E(20)$.

c) Determină valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \cdot (x+2) \in \mathbb{Z}$.

21 Se consideră $E(x) = x - \left(\frac{1}{x-3} + \frac{7-x^2}{x-1} \cdot \frac{1}{x-3} \right) : \frac{x+2}{2(x-1)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$.

a) Arată că $E(x) = x + 2$.

b) Calculează $E(4) + E(5) + E(6) + \dots + E(30)$.

22 Se consideră expresia,

$$E(x) = \left(\frac{a}{a+1} \right)^2 + a^2 + 1, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

a) Calculează $E(2) + E(-2)$.

b) Arată că $E(a) \geq 1$ pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

23 Se consideră

$$E(x) = \frac{\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3}}{\frac{2}{x+3} - \frac{2}{x-3}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

Calculează suma: $E(4) + E(5) + \dots + E(2\,000)$.

24 Se consideră

$$E(x) = \left(\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x} - 1 \right) : \frac{x^2 - 3x + 9}{3x}.$$

a) Demonstrează că $x^2 - 3x + 9 \geq \frac{27}{4}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

c) Demonstrează că $E(x) = \frac{3}{x-3}$.

d) Află valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

e) Calculează

$$\frac{E(4)}{4} + \frac{E(5)}{5} + \frac{E(6)}{6} + \dots + \frac{E(50)}{50}.$$

25 Se consideră expresia

$$E(x) = \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) : \left(\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} \right),$$

unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$.

a) Arată că $E(x) = -\frac{2x}{x+3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$.

b) Determină numerele reale x cu proprietatea $E(x) = E\left(\frac{1}{x}\right)$.

26 Se consideră expresia $E(x) = \frac{(3x+2)^{\frac{1}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}} : \frac{4x+3}{3x-4}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 2, \frac{4}{3}, -\frac{3}{4} \right\}$.

a) Arată că $E(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 2, \frac{4}{3}, -\frac{3}{4} \right\}$.

b) Determină numerele întregi n cu proprietatea că $E(n)$ este număr întreg.

27 Se consideră expresia

$$E(x) = \left(\frac{4}{3x-1} + \frac{1}{3x+1} + \frac{x}{1-9x^2} \right) \cdot \frac{3x-1}{14x+3},$$

unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{3} \right\}$.

a) Arată că $E(x) = \frac{1}{3x+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{3} \right\}$.

b) Calculează numărul

$$p = \left(E(0) - \frac{1}{100} \right) \cdot \left(E(1) - \frac{1}{100} \right) \cdot \left(E(2) - \frac{1}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(E(100) - \frac{1}{100} \right).$$

28 Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+3} - 1 \right) \cdot \left(\frac{x^2+9}{x^2-x-6} \right)^{-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}$.

a) Arată că $E(x) = \frac{x+2}{x+3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}$.

b) Determină numerele reale x cu proprietatea $E(x) = x$.





TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE
PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Rezultatul calculului $(3x + 8x - 5x) : x$ este egal cu ...
- 5p 2 Dacă scoatem factor comun pe $3x$, expresia $3x^2 - 6x$ devine ...
- 5p 3 După simplificare, fracția algebrică $\frac{x^2 - 9}{3x - 9}$ devine ...
- 5p 4 Calculând $\frac{3}{x+1} + \frac{3x}{x+1}$, se obține ...
- 5p 5 Dacă $E(x) = \frac{x}{x-3} + \frac{x-1}{x}$, atunci $E(2) = \dots$
- 5p 6 Rezultatul calculului $(x-1)(x+1) - x^2$ este ...

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 $E(x) = \frac{x^2 - 6}{x}$. Calculând $E(2)$ se obține:
A. -1 B. 1 C. -5 D. 5
- 5p 2 Dacă $x + \frac{1}{x} = 2$, atunci $x^2 + \frac{1}{x^2}$ este egal cu:
A. 6 B. 4 C. 0 D. 2
- 5p 3 Dacă $b + c = 5$ și $b^2 - c^2 = 45$, atunci valoarea expresiei $5b - 5c$ este egală cu:
A. -25 B. -45 C. 45 D. -200
- 5p 4 Rezultatul calculului $(x - 2x + 3x)^2 : (-4x)$ este egal cu:
A. x B. $-x$ C. $-\frac{x}{2}$ D. -1
- 5p 5 Rezultatul calculului $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x - 1}$ este:
A. $x + 1$ B. $x - 1$ C. $\frac{1}{x + 1}$ D. $\frac{x - 1}{x + 1}$
- 5p 6 Dacă $(x - 2)^3 - 9x + 18 = (x + a)(x + b)(x + c)$, atunci $a + b + c$ este egal cu:
A. 8 B. -8 C. -6 D. 6

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

- 1 Se consideră $E(x) = (x + 1)^2 + 2(x - 7) + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Arată că $E(x) = (x - 2)(x + 6)$.
- 10p b) Arată că $E(x) \geq -16$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 2 Se consideră $E(x) = \left(\frac{x-6}{x^2-25} - \frac{x}{5-x} - \frac{2}{x+5} \right) : \frac{2x^2+x-6}{x^2-25}$,
- 5p a) Arată că $E(x) = \frac{x+2}{2x-3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -5, -2, \frac{3}{2}, 5 \right\}$.
- 10p b) Pentru ce valori întregi ale lui x , expresia $E(x)$ este un număr întreg?



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Soluțiile reale ale ecuației $2x^2 + 3x = 0$ sunt $x_1 = \dots$ și $x_2 = \dots$.
- 5p 2 Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $9x^2 - 1 = 0$ este $\dots$.
- 5p 3 Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + x - 20 = 0$ este $\dots$.
- 5p 4 Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - x + 1 = 0$ este $\dots$.
- 5p 5 Suma rădăcinilor reale ale ecuației $2x^2 - 8x + 1 = 0$ este egală cu $\dots$.
- 5p 6 Un pătrat are aria 12 cm^2 . Perimetrul pătratului este egal cu $\dots \text{ cm}$.

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\frac{2}{x+2} = \frac{x-2}{2}$ este:
 A. $\{2; -2\}$ B. $\{-\sqrt{2}; 2\}$ C. $\{2\sqrt{2}\}$ D. $\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$
- 5p 2 Mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2 - 2x + m = 0$ are soluții reale, este:
 A. $[1, \infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[0, 1]$ D. $(-\infty, 1)$
- 5p 3 Mulțimea valorilor întregi ale lui m pentru care ecuația $x^2 + mx + 9 = 0$ are rădăcinile egale, este:
 A. $\{-6; 6\}$ B. $\{6\}$ C. $\{-6\}$ D. $\{0, 6\}$
- 5p 4 Numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + (m+2)x + m^2 + m + 2 = 0, m \in \mathbb{R}$, este:
 A. 1 B. 2 C. depinde de m D. 0
- 5p 5 Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0, m \in \mathbb{R}$, atunci $|x_1 - x_2|$ are valoarea:
 A. 0 B. 2 C. $2|m|$ D. -2
- 5p 6 Un dreptunghi are lungimea cu 3 cm mai mare decât lățimea și aria 108 cm^2 . Perimetrul dreptunghiului este egal cu:
 A. 42 cm B. 21 cm C. 54 cm D. 27 cm

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

- 5p 1 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = 0$, punând în prealabil condițiile de existență.
- 15p 2 Se consideră $E(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 a) Pentru $a = 3, b = -4$ și $c = 1$, rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $E(x) = 0$.
 b) Pentru $a = b = 1$ și $c = -1$, rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $|E(x) - x^2| + |E(x) - x| = 0$.
 c) Pentru $a = b = 4$ și $c = 5$, află valoarea minimă a lui $E(x)$ când $x \in \mathbb{R}$.
- 3 Fie ecuația $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R}$.
 5p a) Determină m știind că ecuația are soluția $-m$.
 5p b) Determină m pentru care ecuația are două soluții reale diferite.



TESTUL 3

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera **A**, în caz contrar, încercuiește litera **F** (20 de puncte).

5p **1** $2x + (-3x) + 4x - (-5x) = 8x$.

A**F**

5p **2** Amplificată cu $x \neq 0$, fracția $\frac{x-5}{x^2+4}$ devine $\frac{x^2-5x}{x^3+4x}$.

A**F**

5p **3** După simplificare, fracția $\frac{2x-10}{x^2-10x+25}$ devine $\frac{2}{x+5}$.

A**F**

5p **4** Produsul soluțiilor ecuației $7x^2 - 6x - 1 = 0$ este egal cu $-\frac{1}{7}$.

A**F**

SUBIECTUL al II-lea. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect din coloana **B** (20 de puncte).

A**B**

5p **1** $x^2 - 16 = \dots$

a. $3x(x-3)(x+3)$

5p **2** $3x^3 - 27x = \dots$

b. $(2x+5)^2$

5p **3** $4x^2 - 20x + 25 = \dots$

c. $2(5x+1)^2$

5p **4** $50x^2 + 20x + 2 = \dots$

d. $(2x-5)^2$

e. $(x-4)(x+4)$

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

1 Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{2x-5}{x+2} + \frac{6x-2}{3x^2+5x-2} \right) : \frac{2x-3}{x-2}$, unde x este număr real, $x \neq -2$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{3}$ și $x \neq \frac{3}{2}$.

10p a) Arată că $3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2)$, pentru orice număr real x .

10p b) Demonstrează că $E(x) + \frac{4}{x+2} = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -2; 2; \frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}$.

2 Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, unde m este număr real.

10p a) Determină numărul m , știind că $x = 5$ este soluție a ecuației.

10p b) Pentru $m = -3$, rezolvă ecuația în mulțimea numerelor reale.

10p c) Determină numărul m , știind că ecuația are două soluții reale egale.

 Descarcă din manualul digital, apoi completează fișa de observare a unității.

3

FUNCȚII

UNITATEA

LECȚIA 1

Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule

În viața de toate zilele, folosim adesea cuvântul *funcție*, pentru a exprima faptul că rezultatul unui anumit fenomen *depinde* de unul sau mai mulți factori. De exemplu, timpul necesar parcurgerii unei distanțe date este în funcție de viteză. Când cumpărăm un obiect, îl alegem în funcție de preț și de calitate.

În matematică, noțiunea de funcție are un înțeles precis. Funcțiile joacă un rol fundamental, nu numai sub aspect teoretic (în matematică și în științele ce folosesc aparatul matematic), ci și din punctul de vedere al aplicațiilor matematice în practică.



Noțiunea de funcție

Definiții

- Fiind date două mulțimi nevide A , B și un procedeu f prin care se asociază fiecărui element x din mulțimea A un singur element, notat $f(x)$, din mulțimea B , spunem despre tripletul (A, f, B) că reprezintă o *funcție* definită pe A cu valori în B .
- Această funcție se notează $f: A \rightarrow B$.
- Pentru fiecare $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește *imaginea* lui x prin funcția f .
- Mulțimea A reprezintă *domeniul de definiție*, iar mulțimea B reprezintă *codomeniul* sau *mulțimea în care funcția ia valori*.

Scurt istoric

Leonhard Euler, mare matematician elvețian, s-a născut la 15 aprilie 1707 în Basel. El a avut o contribuție fundamentală în analiza matematică și a creat *teoria funcțiilor*. Euler a lucrat în aproape toate ramurile matematicii, printre care: geometrie, trigonometrie, algebră și teoria numerelor. El a introdus noțiunea de funcție și a fost primul care a notat $f(x)$ pentru aplicarea funcției f elementului x .



Observație

Din definiția unei funcții nu rezultă neapărat că orice element din codomeniu trebuie să fie imaginea unui element din domeniul de definiție.

Exemplu

Fie A o mulțime formată din șapte elevi participanți la un test la care se acordă note întregi între 1 și 10. Notăm cu B mulțimea acestor note. Procedeu prin care fiecărui elev din mulțimea A îi asociem nota obținută din mulțimea B îl vom nota cu f . Am definit astfel o funcție $f: A \rightarrow B$ care îndeplinește condițiile din definiție, deși nu toate elementele din codomeniu sunt imagini ale unor elemente din domeniul de definiție.

Observație

Dacă $f: A \rightarrow B$ este o funcție, atunci trebuie făcută distincție între expresia f care este un procedeu de corespondență între elementele lui A și B și expresia $f(x)$, $x \in A$, care reprezintă un element din mulțimea B .

Funcțiile definite pe mulțimi finite pot fi exprimate în mai multe moduri.

**Funcții definite pe mulțimi finite exprimate cu ajutorul unui tabel**

În figura 1 este reprezentată o țintă asupra căreia s-au lansat patru săgeți numerotate de la 1 la 4, precum și punctajele obținute la aceste lansări. Putem să notăm aceste rezultate cu ajutorul unui tabel, astfel:

1	2	3	4
80	70	100	80

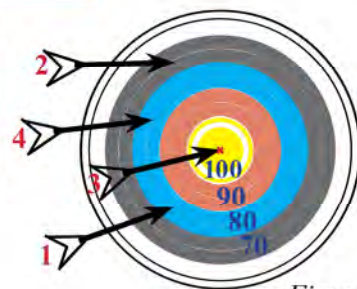


Figura 1

Acest tabel arată că la lansarea săgeții numărul 1 au fost obținute 80 de puncte, la lansarea săgeții numărul 2 au fost obținute 70 de puncte etc. Tabelul exprimă corespondența dintre mulțimea săgeților $\{1, 2, 3, 4\}$ și punctajele obținute din mulțimea $\{70, 80, 90, 100\}$.

Astfel, elementului 1 îi corespunde elementul 80, elementului 2 îi corespunde elementul 70, elementului 3 îi corespunde elementul 100, iar elementului 4 îi corespunde elementul 80. Putem scrie aceste corespondențe ca mai jos:

$$1 \rightarrow 80; 2 \rightarrow 70; 3 \rightarrow 100; 4 \rightarrow 80.$$

Notăm $t: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{70, 80, 90, 100\}$ și citim funcția t (tragere la țintă) definită pe mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ (a săgeților) cu valori în mulțimea $\{70, 80, 90, 100\}$ (a rezultatelor).

Notăția $t(x)$ care se citește „ t de x ” exprimă faptul că variabilei x îi corespunde valoarea $t(x)$ (imaginea variabilei x prin funcția t). Astfel, avem $t(1) = 80$, $t(2) = 70$, $t(3) = 100$, $t(4) = 80$.

În exemplul considerat, variabila x aparține mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ care se numește domeniul de definiție al funcției t . Mulțimea $\{70, 80, 90, 100\}$ reprezintă mulțimea în care funcția t ia valori sau codomeniul funcției.

Legea de corespondență a fost, așadar, exprimată cu ajutorul unui tabel de valori.

**Funcții definite pe mulțimi finite exprimate cu ajutorul unor diagrame**

Figura 2 reprezintă un raft dintr-un magazin, pe care sunt expuse câteva produse și sunt afișate prețurile corespunzătoare.

				
Ulei	Zahăr	Suc	Bulion	Făină
7 lei	3 lei	4 lei	4 lei	2 lei

Figura 2

Oricărui produs de pe raft îi corespunde un singur preț. Reprezentăm corespondența cu ajutorul diagramei din figura 3.

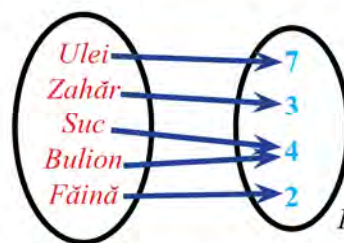


Figura 3

Notăm $p: A \rightarrow B$ funcția p (preț) definită pe mulțimea A (a produselor expuse pe raft) cu valori în mulțimea B (a prețurilor produselor).

Notăția $p(x)$ exprimă faptul că variabilei x din mulțimea A îi corespunde valoarea $p(x)$ (prețul produsului x) din mulțimea B . De exemplu, $p(\text{zahăr}) = 3$.

Pentru funcția p , corespondența a fost exprimată cu ajutorul unei diagrame.

Observație

Nu trebuie înțeles că orice diagramă reprezintă o funcție.

Astfel, diagrama din figura 4 nu definește o funcție de la mulțimea M la mulțimea N , pentru că elementului 4 din M îi corespund două elemente, 90 și 100 din mulțimea N (vezi figura 4).

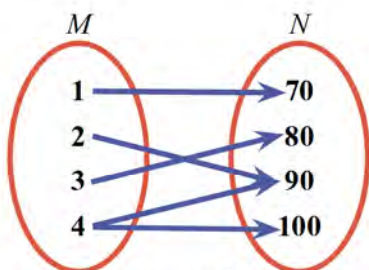


Figura 4

Diagrama din figura 5 nu definește o funcție de la mulțimea E la mulțimea H , pentru că elementului 3 din E nu-i corespunde niciun element din mulțimea H (vezi figura 5).

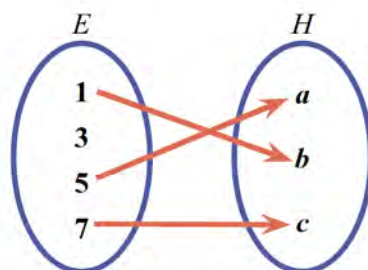


Figura 5



Funcții definite pe mulțimi finite exprimate cu ajutorul unei formule

Un test constă din 6 întrebări: pentru fiecare întrebare la care se răspunde corect se acordă 1,5 puncte. La punctajul obținut astfel, se adaugă 1 punct din oficiu. Punctajul total depinde de numărul x al întrebărilor la care se răspunde corect. Pentru fiecare $x \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$, notăm punctajul corespunzător cu $f(x)$.

Relația $f(x) = 1,5 \cdot x + 1$ definește o funcție de la mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ la mulțimea $[0; \infty)$.



Funcții egale

Definiție

Fie $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$, două funcții. Spunem că funcțiile sunt egale dacă au același domeniu de definiție, același codomeniu și același procedeu de corespondență.

REȚINE!

Dacă $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$ avem $f = g$ dacă și numai dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Exemplu

Considerăm funcțiile $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ și $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, unde $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Z}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$. Avem $A = B = \{-1, 0, 1\}$ și $f(-1) = |-1| = 1$, $g(-1) = (-1)^2 = 1$, deci $f(-1) = g(-1)$. Analog, avem $f(0) = g(0) = 0$ și $f(1) = g(1) = 1$. Deci, cele două funcții sunt egale.



Mulțimea valorilor unei funcții

Fie funcția $t: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{70, 80, 90, 100\}$, având tabelul de valori.

x	1	2	3	4
$t(x)$	80	70	90	80

Mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă *domeniul de definiție*, iar mulțimea $\{70, 80, 90, 100\}$ reprezintă mulțimea în care funcția ia valori sau *codomeniul*. Observăm că funcția t nu ia toate valorile din *codomeniu*, ci numai valorile 70, 80, 90. Spunem că *mulțimea valorilor funcției* este $\{70, 80, 90\}$.

Pentru funcția $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ a cărei diagramă este în figura 6, domeniul de definiție este $\{1, 2, 3, 4\}$, codomeniul este $\{0, 1, 2, 3\}$, iar mulțimea valorilor este $\{0, 3\}$.

Pentru funcția $g: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 3, 6\}$ definită prin relația $g(x) = 3x$, mulțimea valorilor coincide cu codomeniul.

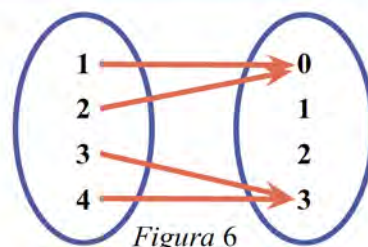


Figura 6

Definiție

Pentru funcția $f: A \rightarrow B$, se numește *mulțimea valorilor funcției* mulțimea notată $f(A)$, definită prin relația $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Observații

1. Mulțimea valorilor funcției este inclusă în codomeniu, putând să fie egală cu codomeniul sau inclusă strict în acesta.
2. Mulțimea valorilor funcției este numită și *imaginea* funcției f și se poate nota cu $\text{Im } f$.
3. În cazul funcțiilor definite pe mulțimi finite, mulțimea valorilor se citește cu ușurință din tabelul de valori sau din diagramă.



Probleme rezolvate

- 1 a) Scrie toate funcțiile definite pe mulțimea $\{a, b\}$ cu valori în mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Câte funcții există de la mulțimea $\{a, b\}$ la mulțimea $\{1, 2, 3\}$?
- b) Pentru fiecare funcție determinată scrie imaginea ei.

Soluție a) În mod evident elementul $f(a)$ se poate alege în 3 moduri. Pentru fiecare valoare a lui $f(a)$, se poate alege $f(b)$ în trei moduri. Deci există 9 funcții definite pe $\{a, b\}$ cu valori în $\{1, 2, 3\}$, și anume funcțiile descrise cu ajutorul următoarelor diagrame (vezi figura 7). Avem în total $3^2 = 9$ funcții.

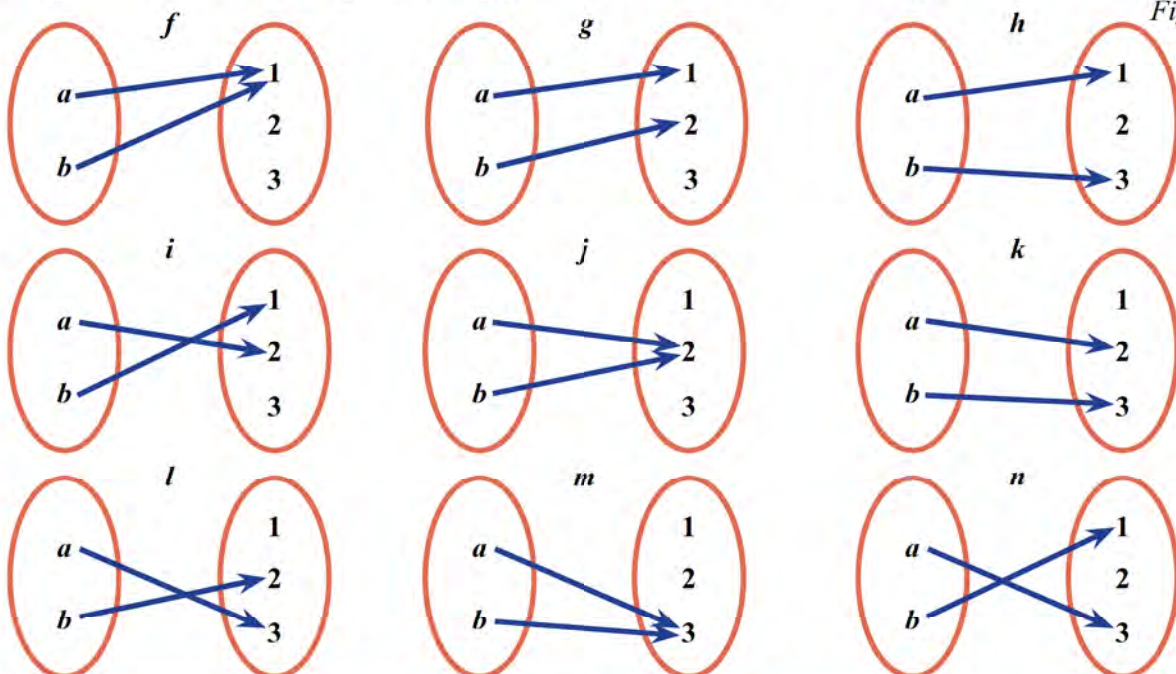


Figura 7

b) $\text{Im } f = \{1\}$; $\text{Im } g = \{1, 2\}$; $\text{Im } h = \{1, 3\}$; $\text{Im } i = \{1, 2\}$; $\text{Im } j = \{2\}$; $\text{Im } k = \{2, 3\}$; $\text{Im } l = \{2, 3\}$; $\text{Im } m = \{3\}$; $\text{Im } n = \{1, 3\}$.

- 2 Dacă luăm la întâmplare o funcție $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, care este probabilitatea ca aceasta să aibă proprietatea $f(a)f(b)f(c) = 9$?

Soluție Numărul cazurilor posibile este egal cu numărul tuturor funcțiilor definite pe $\{a, b, c\}$ cu valori în $\{1, 2, 3\}$, adică $3^3 = 27$. Cum $f(a)$, $f(b)$ și $f(c)$ sunt din mulțimea $\{1, 2, 3\}$, produsul lor este 9 când două dintre aceste numere sunt egale cu 3 și unul este egal cu 1.

Deci există trei cazuri favorabile, și anume funcțiile ale căror tabele de valori sunt:

a	b	c
1	3	3

a	b	c
3	1	3

a	b	c
3	3	1

Probabilitatea cerută este $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

- 3 Se consideră funcția $f: \{-1, (2); \frac{3}{7}; 2; \sqrt{11}\} \rightarrow \mathbb{N}$, care este definită cu ajutorul tabelului de mai jos:

x	$-1, (2)$	$\frac{3}{7}$	2	$\sqrt{11}$
$f(x)$	4	1	0	a

Află numărul a , știind că acesta aparține mulțimii $M = \{\sqrt{2}, \sqrt{20}, \sqrt{202}, \sqrt{2\,025}\}$.

Soluție Deoarece $M \cap \mathbb{N} = \{\sqrt{2\,025}\}$, obținem că $a = \sqrt{2\,025} = 45$.

- 4 Se consideră funcțiile $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$, $f(x) = x + 1$ și $g: \{3, 4, 5\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$, $g(x) = x - 1$.

- a) Arată că $f(1) = g(3)$, $f(2) = g(4)$ și $f(3) = g(5)$.
b) Sunt egale funcțiile f și g ? Justifică răspunsul!

Soluție

- a) $f(1) = 1 + 1 = 2$, $g(3) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow f(1) = g(3)$; $f(2) = 2 + 1 = 3$, $g(4) = 4 - 1 = 3 \Rightarrow f(2) = g(4)$;
 $f(3) = 3 + 1 = 4$, $g(5) = 5 - 1 = 4 \Rightarrow f(3) = g(5)$.
b) Funcțiile f și g nu sunt egale, deoarece nu au același domeniu de definiție.

Comentariu

Cu un raționament asemănător celui de la problema 1, se poate demonstra un rezultat util:

Dacă mulțimea A are m elemente, iar mulțimea B are n elemente, atunci numărul tuturor funcțiilor definite pe A cu valori în B este n^m .



FIXARE

EXERSARE

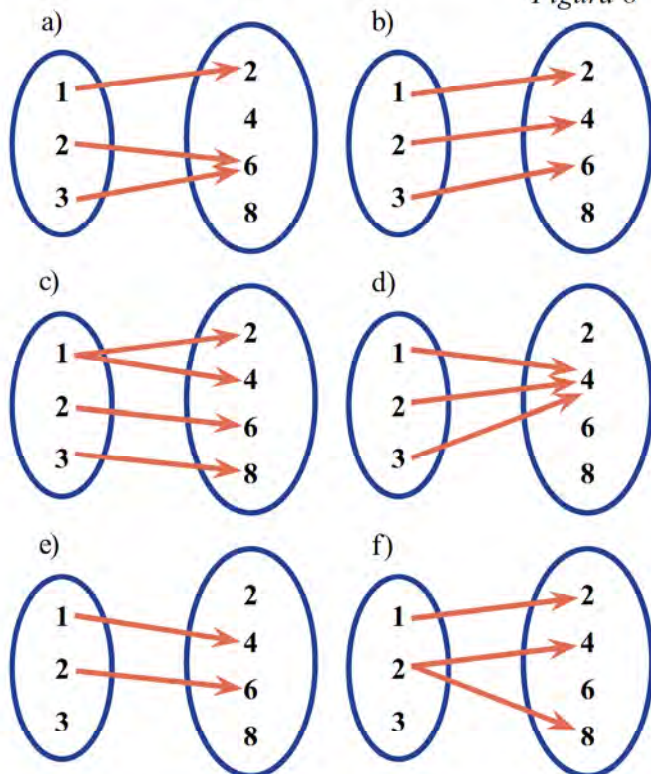
CONSOLIDARE

PROBLEME



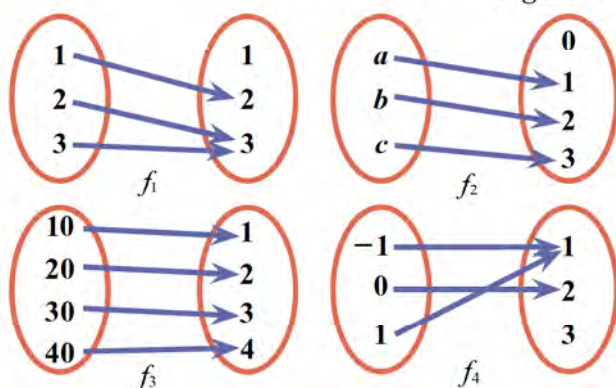
- 1 Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Care dintre diagramele de mai jos definesc funcții de la mulțimea A la mulțimea B ? (Vezi figura 8). Justifică răspunsurile!

Figura 8



- 2 Pentru fiecare dintre funcțiile date prin diagramele din figura 9, precizează domeniul de definiție, codomeniul, imaginea funcției și apoi alcătuiește tabelul de valori.

Figura 9



- 3 Dă exemplu:

- a) de funcție $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $\text{Im } f = \{2, 5\}$;
 b) de funcție $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $\text{Im } f$ are un singur element.

- 4 Se consideră funcția $g: \{4, 6, 8, 10\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, definită prin relația $g(x) = \frac{x}{2} - 1$. Descrie corespondența cu ajutorul unei diagrame, dar și cu ajutorul unui tabel de valori.

- 5 a) Construiește toate funcțiile definite pe mulțimea $\{1, 2\}$ cu valori în mulțimea $\{3, 4\}$. Exprimă fiecare funcție prin câte o diagramă.

- b) Dacă luăm la întâmplare o funcție $f: \{1, 2\} \rightarrow \{3, 4\}$, care este probabilitatea de a avea $f(1) + f(2) = 7$?

- 6 Construiește o funcție al cărei domeniu de definiție este mulțimea disciplinelor pe care le studiezi în clasa a VIII-a, fiecărei discipline corespunzându-i numărul de ore afectate săptămânal conform orarului. Exprimă corespondența cu ajutorul unui tabel.

- 7 Într-o cutie sunt x bile albe și $10 - x$ bile negre. Pentru fiecare $x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ notăm cu $p(x)$, probabilitatea ca la o extragere a unei bile din cutie să obținem o bilă neagră.

- a) Descrie funcția $p: \{1, 2, 3, \dots, 9\} \rightarrow \mathbb{R}$, printr-o formulă matematică.
 b) Realizează un tabel de valori al funcției.
 c) Precizează valoarea lui x pentru care $p(x) = 0,6$.
 d) Determină valoarea maximă și valoarea minimă a funcției.

- 8 Un concurs constă în 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte.

Se consideră funcția $f: \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{Z}$, unde $f(n)$ reprezintă punctajul care se realizează dacă se dau n răspunsuri corecte (deci $10 - n$ răspunsuri greșite).

- a) Realizează tabelul de valori ale funcției.



b) Precizează valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

c) Stabilește formula de calcul a lui $f(n)$.

9 Dacă luăm la întâmplare o funcție definită pe mulțimea $\{1, 2, 3\}$ cu valori în mulțimea $\{4, 5, 6\}$, care este probabilitatea ca $f(1) > f(2) > f(3)$?

10 Se consideră funcțiile $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2021}$ și $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$. Demonstrează că $f = g$.

11 Se consideră funcțiile $f: \{1, a\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ și $g: \{0, b\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = cx$. Află numerele reale a, b, c , astfel încât $f = g$.

12 Se numește diagonală a unui poligon convex un segment care unește două vârfuri nealăturate ale poligonului. Fie funcția $d: \{4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow \mathbb{N}^*$, unde $d(n)$ este numărul diagonalelor unui poligon cu n laturi. Stabilește formula de calcul a lui $d(n)$ și realizează tabelul de valori al funcției.

13 Se consideră funcțiile f, g, h date prin tabelele de mai jos. Desenează diagramele corespunzătoare și apoi precizează formula legii de corespondență.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4	9

b)

x	-2	-1	2	3
$g(x)$	2	1	2	3

c)

x	-2	0	1	2	3
$h(x)$	-4	0	2	4	6

14 Reprezintă printr-o diagramă și apoi printr-un tabel următoarele funcții:

a) $f: \{-1, 2, 4\} \rightarrow \{-2, 4, 8\}$;

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{dacă } x = -1 \\ 2x, & \text{dacă } x \in \{2, 4\} \end{cases};$$

b) $g: \{-1, 0, 1, 3\} \rightarrow \{-2, 1, 2\}$;

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \in \{0, 1\} \\ 1-x, & \text{dacă } x \in \{-1, 3\} \end{cases};$$

c) $h: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0\}$;

$$h(x) = \begin{cases} |x|-1, & \text{dacă } x \in \{-1, 0, 1\} \\ 1-|x|, & \text{dacă } x \in \{-2, 2\} \end{cases}.$$

15 Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$.

a) Determină valorile funcției.

b) Întocmește tabelul de valori și diagrama funcției.

16 Se consideră funcția $f: \{2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x)$ reprezintă perimetrul unui triunghi echilateral de latură x .

a) Determină mulțimea valorilor funcției.

b) Întocmește tabelul de valori al funcției.

17 Pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos stabilește codomeniul B , cu număr minim de elemente:

a) $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow B, f(x) = x + 1$;

b) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow B, f(x) = |x| + 1$.

18 Se consideră funcția $f: A \rightarrow B, f(x) = |2x - 3|$.

a) Dacă $A = \{-2, 0, 1, 2\}$, determină mulțimea B , știind că aceasta are trei elemente.

b) Dacă $B = \{1, 2\}$, determină mulțimea A , știind că aceasta are patru elemente.

19 Se consideră funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, care asociază fiecărui număr natural n restul împărțirii sale prin 5.

a) Determină $f(2), f(5), f(29)$ și $f(103)$.

b) Determină mulțimea valorilor funcției f .

20 Se consideră funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \text{ultima cifră a numărului } 7^n$.

a) Calculează $f(0), f(1), f(2)$ și $f(3)$.

b) Arată că $f(2) = f(22)$.

c) Calculează $f(2) - f(20) + f(202) - f(2\,024)$.

21 Se consideră funcția $h: C \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| \leq 3\} \text{ și } h(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

a) Scrie elementele domeniului de definiție al funcției h .

b) Scrie elementele din imaginea funcției h .

c) Stabilește dacă numărul $h(0) + h(2)$ este rațional sau irațional.

LECȚIA 2

Graficul unei funcții

Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice

Considerăm mulțimea M , formată din 4 copii: Ana, Bogdan, Carmen și Daniel. Vârstele copiilor (în ani) sunt precizate în tabelul alăturat:

Ana	Bogdan	Carmen	Daniel
7	13	10	11

Construim funcția $v: M \rightarrow \mathbb{N}$, care face ca fiecărui copil din mulțimea M să-i corespundă vârsta sa. Astfel, avem $v(\text{Ana}) = 7$, $v(\text{Bogdan}) = 13$ etc. Putem alcătui perechile ordonate: (Ana, 7), (Bogdan, 13), (Carmen, 10), (Daniel, 11). Mulțimea acestor perechi o numim *graficul* funcției v .

Definiție

Se numește *graficul* funcției $f: A \rightarrow B$ mulțimea notată G_f , definită prin relația

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

REȚINE!

$$(x, y) \in G_f \text{ dacă și numai dacă } y = f(x)$$

Exemplu

Graficul funcției v construită anterior, este format din patru perechi, și anume:

$$G_v = \{(\text{Ana}, 7), (\text{Bogdan}, 13), (\text{Carmen}, 10), (\text{Daniel}, 11)\}.$$

- Graficul unei funcții $f: A \rightarrow B$ este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.
- Numărul elementelor graficului este egal cu numărul elementelor domeniului de definiție al funcției.

Definiție

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, atunci funcțiile $f: A \rightarrow B$ se numesc funcții *numerice*.

Observații

1. Funcția v din exemplul anterior nu reprezintă o funcție numerică, deoarece domeniul de definiție nu este o submulțime a lui $\mathbb{R}$.
2. Funcția $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, reprezintă o funcție numerică.



Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice

Dacă $f: A \rightarrow B$ este o funcție numerică, atunci fiecare element $(x, f(x))$ al graficului este o pereche de numere reale. Prin urmare, alegând un sistem de coordonate în plan, putem face ca fiecărei perechi $(x, f(x))$ să-i corespundă punctul de abscisă x și ordonată $f(x)$.

REȚINE!

Mulțimea tuturor punctelor din plan de coordonate $(x, f(x))$, cu $x \in A$, se numește *reprezentarea geometrică a graficului* funcției numerice f .



Exemplu

Pentru funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x|$, avem tabelul de valori:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	1	2

Graficul este

$$G_f = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}.$$

Reprezentarea geometrică a graficului este alcătuită din 5 puncte, și anume:

$A(-2, 2)$, $B(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $C(1, 1)$ și $D(2, 2)$ (vezi figura 10).

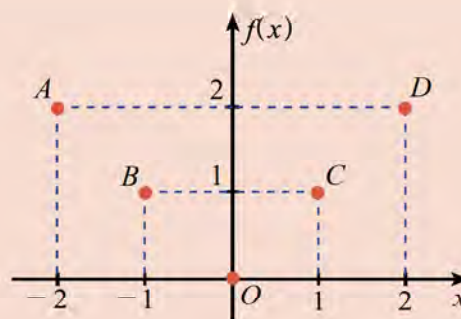


Figura 10

**Câteva precizări legate de limbaj**

- A reprezenta grafic o funcție $f: A \rightarrow B$ (unde $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$) înseamnă a desena într-un sistem de axe ortogonale reprezentarea geometrică a graficului.
- Noțiunea de grafic este diferită de aceea de reprezentare geometrică a graficului. Graficul este o mulțime de perechi din $A \times B$, în timp ce reprezentarea geometrică a graficului este o mulțime de puncte din plan.
- Pentru simplitate, uneori spunem *grafic* în loc de *reprezentarea geometrică a graficului*. Astfel, în loc să spunem că un punct din plan aparține reprezentării geometrice a graficului, spunem, mai simplu, că punctul aparține graficului.

**Probleme rezolvate**

- 1** Reprezintă grafic funcția $f: \{-1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ definită prin $f(x) = -x^2 + 4$.

Soluție $f(-1) = -(-1)^2 + 4 = 3$; $f(2) = -2^2 + 4 = 0$; $f(3) = -3^2 + 4 = -5$.

Tabelul de valori este:

x	-1	2	3
$f(x)$	3	0	-5

Graficul funcției este $G_f = \{(-1, 3), (2, 0), (3, -5)\}$.

Reprezentarea geometrică a graficului este mulțimea punctelor

$A(-1, 3)$, $B(2, 0)$, $C(3, -5)$ (vezi figura 11).

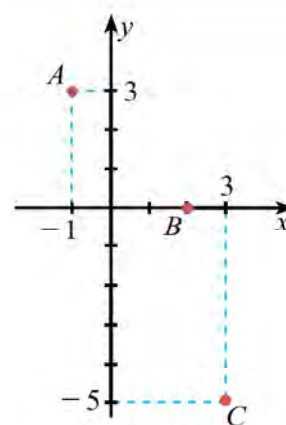


Figura 11

- 2** Graficul unei funcții f este $\{(2, 2), (3, 7), (10, 2)\}$. Alcătuieste tabelul de valori, precizează domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției.

Soluție Avem $f(2) = 2$, $f(3) = 7$ și $f(10) = 2$, deci tabelul de valori este

x	2	3	10
$f(x)$	2	7	2

Domeniul de definiție este $\{2, 3, 10\}$, iar mulțimea valorilor este $\{2, 7\}$.



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{2}{x+3}$. Stabilește care dintre punctele: $A(-2; 2)$; $B(2; 0, 5)$; $C(0; 0, (6))$; $D(1; 0, 4)$; $E(3; \frac{1}{3})$ aparțin graficului funcției f .
- 2 Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Alcătuieste tabelul de valori al funcției, determină graficul funcției și reprezintă grafic funcția.
- 3 Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$ al cărei grafic este $G_f = \{(1, 1), (-1, 1), (\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, 2)\}$. Găsește domeniul de definiție și mulțimea valorilor.
- 4 Reprezintă grafic următoarele funcții:
 - a) $f: \{-2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$;
 - b) $g: \{-3, -2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 4$;
 - c) $h: \{-4, -2, 0, 2, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = |x + 1|$;
 - d) $i: \{-3; -2, 7; -\sqrt{3}; -\sqrt{2}; 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = |x|$.
- 5 Se consideră funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$. Stabilește care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției date: $A(1, 3)$; $B(-2, 3)$; $C(-2, -3)$; $D(2, 5)$; $E(0, 1)$; $F(\frac{1}{2}, 2)$.
- 6 Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 5$. Determină:
 - a) $a \in \mathbb{R}$, știind că $A(3, a)$ aparține graficului funcției;
 - b) $b \in \mathbb{R}$, știind că $B(b, 2)$ aparține graficului funcției;
 - c) $c \in \mathbb{R}$, știind că $C(c, c)$ aparține graficului funcției;
 - d) punctul de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu dublul ordonatei;
 - e) punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele opuse.
- 7 Reprezintă grafic funcția $g: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \mathbb{Z}$, definită prin $g(n) = (-1)^n$.

- 8 Stabilește care dintre desenele următoare pot fi reprezentări grafice de funcții (vezi figura 12). Justifică răspunsul!

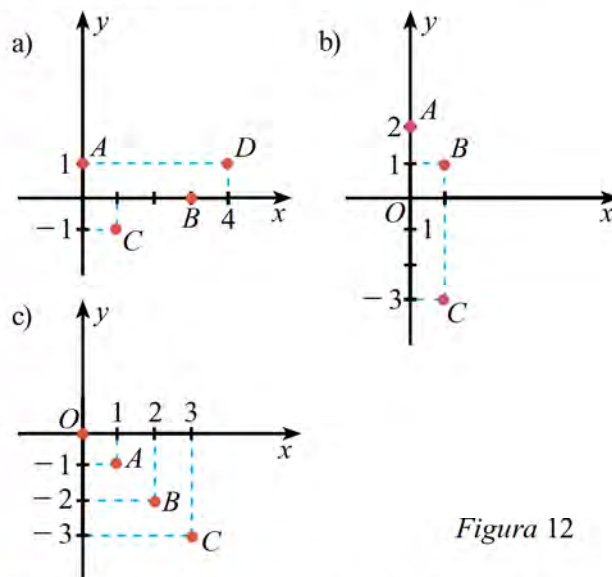


Figura 12

- 9 În figura 13 este reprezentat graficul funcției $f: \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \mathbb{N}$, unde $f(x)$ reprezintă numărul elevilor unei clase care au obținut nota x la o anumită lucrare. Axa Ox reprezintă axa notelor obținute, iar axa Oy reprezintă numărul de elevi. Ca unitate de măsură a fost desemnată dublul lungimii laturii unui pătrat din figură.

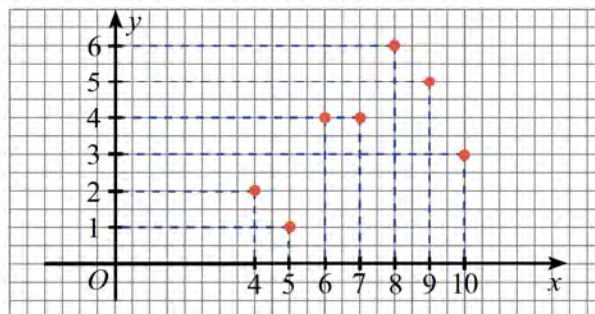


Figura 13

Precizează:

- a) numărul elevilor din clasă;
- b) numărul elevilor care au obținut note mai mari sau egale cu 8;
- c) nota cu cea mai mare frecvență;
- d) nota cu cea mai mică frecvență;
- e) media clasei la lucrarea considerată.



LECȚIA 3

Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale sau $D = \mathbb{R}$

⇒ **Funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$**

- Dacă D este o mulțime finită formată din n numere reale, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci graficul funcției f este format din n puncte distincte din plan.

Exemplu

Dacă $g: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$, graficul său este alcătuit din 5 puncte (vezi figura 14).

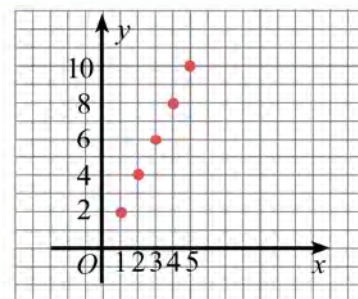


Figura 14

- Dacă $D = \mathbb{R}$, atunci graficul funcției este format dintr-o infinitate de puncte. Studiem în continuare aceste funcții.

Exemplu

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcția f are același procedeu de corespondență ca funcția g din exercițiul de mai sus, dar cele două funcții au domenii de definiție diferite, deci graficele sunt diferite. Toate punctele graficului funcției g aparțin și graficului lui f . Dar, întrucât domeniul de definiție al funcției f este o mulțime infinită, reprezentarea grafică a lui f conține o infinitate de puncte. Figura 14 sugerează coliniaritatea punctelor graficului. Vom demonstra că graficul funcției f este dreapta OA unde $A(1, 2)$.

Fie $M(t, 2t)$ cu $t \neq 0$ un punct arbitrar al graficului, diferit de O . Notăm cu M' proiecția lui M pe Ox (vezi figura 15). În triunghiurile dreptunghice OAA' și OMM' , avem

$$\frac{OA'}{OM'} = \frac{1}{t} \text{ și } \frac{AA'}{MM'} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}, \text{ deci } \frac{OA'}{OM'} = \frac{AA'}{MM'}.$$

Rezultă că triunghiurile sunt asemenea. De aici deducem că $\angle AOA' \equiv \angle MOM'$, deci O, A, M sunt coliniare.

Am arătat astfel că orice punct al graficului se află de dreapta OA .

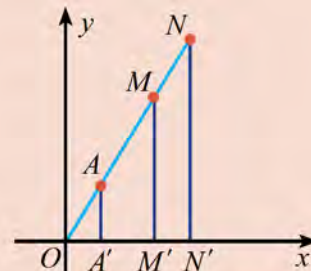


Figura 15

Reciproc, fie un punct $N(n, p)$ al dreptei OA și N' proiecția lui N pe Ox . Din teorema fundamentală a asemănării, rezultă că triunghiurile OAA' și ONN' sunt asemenea, prin urmare $\frac{OA'}{ON'} = \frac{AA'}{NN'}$, adică $\frac{1}{n} = \frac{2}{p}$, de unde $p = 2n = f(n)$, ceea ce dovedește că N aparține graficului.

Am arătat astfel (prin dublă incluziune) că reprezentarea geometrică a graficului este o dreaptă.

Cu un raționament analog se demonstrează următoarea proprietate:

REȚINE!

Graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \neq 0$ este o dreaptă care trece prin origine.

Observații

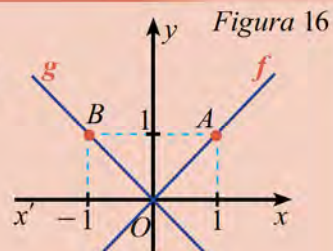
1. Dacă f este o funcție definită printr-o relație de forma $f(x) = ax$, atunci fiecare imagine $f(x)$ este direct proporțională cu x . *Reciproc*, o dependență direct proporțională se exprimă printr-o funcție de forma $f(x) = ax$.

2. Pentru cazurile particulare $a = 1$ și $a = -1$ obținem funcțiile

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \text{ și } g(x) = -x.$$

Graficul funcției f este o dreaptă OA unde $A(1, 1)$, iar graficul funcției g este o

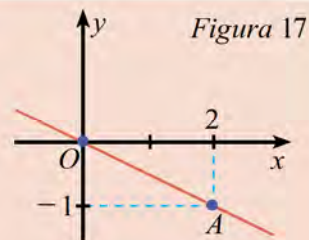
dreaptă OB , unde $B(-1, 1)$ (vezi figura 16). Dreapta OA este numită *prima bisectoare*, iar dreapta OB , *a doua bisectoare*. Denumirile sunt motivate de relațiile $\sphericalangle xOA \equiv \sphericalangle yOA$ și $\sphericalangle x'OB \equiv \sphericalangle yOB$.



3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$ se mai numește și *funcție liniară* (deoarece graficul său este o dreaptă).

Exemplu

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x$, este liniară și graficul său conține originea. Calculăm $f(2) = -1$; rezultă că $A(2, -1)$ aparține graficului. Dreapta OA constituie reprezentarea graficului funcției date (vezi figura 17).



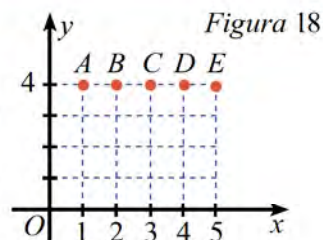
⇒ Funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b$, unde $b \in \mathbb{R}$

Definiție

O funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b$, unde $D \subset \mathbb{R}$ sau $D = \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}$, se numește *funcție constantă*.

- Dacă D este o mulțime finită formată din n numere reale $n \in \mathbb{N}^*$, atunci graficul funcției f este format din n puncte situate la aceeași distanță față de Ox . Astfel, dacă $g: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4$, atunci graficul lui g este alcătuit din 5 puncte (vezi figura 18).

Din reprezentarea geometrică, observăm că punctele A, B, C, D și E au aceeași ordonată egală cu 4 și deci punctele se găsesc la aceeași distanță față de axa Ox .



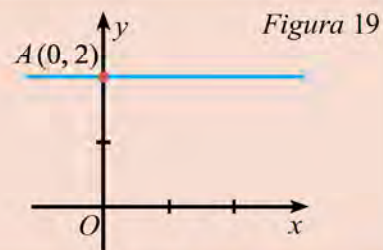
- Dacă $D = \mathbb{R}$, atunci graficul funcției f este format dintr-o infinitate de puncte situate la aceeași distanță $d = |b|$ față de Ox . Aceasta deoarece punctele graficului au aceeași ordonată b . În cazul particular $b = 0$, graficul coincide cu axa Ox .

REȚINE!

Graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b$, este o dreaptă orizontală (paralelă cu axa Ox).

Exemplu

În figura 19 este reprezentat graficul funcției constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2$.



⇒ **Funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin relații de tipul $f(x) = ax + b$ unde $a, b \in \mathbb{R}^*$**

Am studiat anterior cazurile particulare ale funcțiilor de acest tip:

- pentru $b = 0$, se obțin funcții liniare;
 - pentru $a = 0$, se obțin funcții constante.
- Are loc următoarea proprietate:

REȚINE!

Graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, este o dreaptă.

De exemplu, vom justifica faptul că graficul funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x + 3$, este o dreaptă, cu ajutorul funcției liniare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Am demonstrat anterior că graficul funcției f este o dreaptă ce trece prin origine.

Deoarece $h(x) = f(x) + 3$, putem face ca fiecărui punct al graficului lui f să-i corespundă un punct al graficului lui h având aceeași abscisă, iar ordonata mai mare cu trei unități.

De exemplu, punctului $O(0, 0)$ de pe graficul lui f îi corespunde punctul $E(0, 3)$ pe graficul lui h ; punctului $A(1, 2)$ de pe graficul lui f îi corespunde punctul $F(1, 5)$ pe graficul lui h . Astfel, graficul lui h se obține *translatând* graficul lui f pe direcția axei Oy cu 3 unități în sens pozitiv (vezi figura 20, latura fiecărui pătrățel reprezintă unitatea de măsură).

Pentru a trasa graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = ax + b$, este suficient să reprezentăm două puncte arbitrare ale sale și să trasăm dreapta determinată de ele. În unele probleme este util ca aceste puncte de pe grafic să fie intersecțiile cu axele de coordonate ale reprezentării grafice.

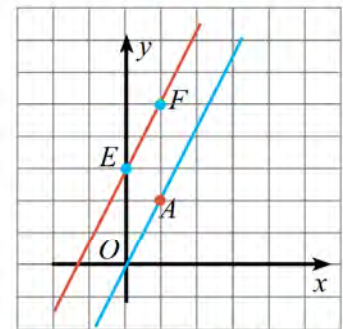


Figura 20

Observație

Deoarece graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este o dreaptă, funcția f se mai numește *funcție liniară*.

REȚINE!

- Axa Ox reprezintă mulțimea punctelor din plan care au *ordonata egală cu zero*. Punctul $(x, f(x))$ al graficului aparține axei Ox dacă și numai dacă $f(x) = 0$.
- Axa Oy reprezintă mulțimea punctelor din plan care au *abscisa egală cu zero*. Punctul $(x, f(x))$ al graficului aparține axei Oy dacă și numai dacă $x = 0$.

Exemplu

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 3$.

Pentru a determina intersecția graficului cu axa Ox , aflăm valoarea lui x pentru care $f(x) = 0$. Avem $-3x + 3 = 0$, de unde $x = 1$. Punctul căutat este $A(1, 0)$.

Pentru a determina intersecția graficului cu axa Oy , dăm lui x valoarea 0 și avem $f(0) = 3$. Punctul căutat este $B(0, 3)$. Graficul funcției este dreapta AB (vezi figura 21).

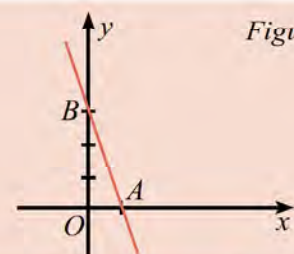


Figura 21

⇒ **Funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde D este o mulțime finită de numere reale**

Dacă A este o mulțime finită cu n elemente, $A \subset \mathbb{R}$, graficul funcției $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, este alcătuit din n puncte ale căror abscise sunt elementele mulțimii A . Cum graficul funcției f este inclus în graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, rezultă că punctele ce alcătuiesc graficul lui f sunt coliniare.

De exemplu, graficul funcției $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, este alcătuit din 5 puncte coliniare, având coordonatele $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ și $(2, 5)$ (vezi figura 22). Unitatea de măsură aleasă este egală cu lungimea laturii unui pătrățel din figură.

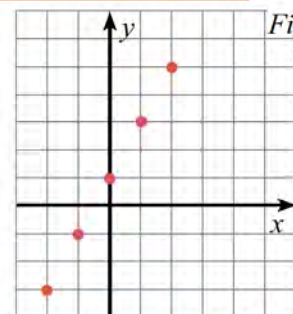


Figura 22



Probleme rezolvate

1 Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$.

Soluție Întocmim tabelul $\begin{array}{c|cc} x & 1 & 3 \\ \hline f(x) & -2 & 2 \end{array}$ și obținem punctele $A(1, -2)$ și $B(3, 2)$. Reprezentarea graficului este dreapta AB (vezi figura 23).

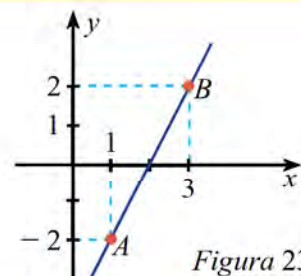


Figura 23

- 2 a) Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$.
b) Calculează aria triunghiului determinat de reprezentarea graficului funcției date cu axele de coordonate ale sistemului cartezian.

Soluție a) Fiind util în rezolvarea punctului b), pentru trasarea graficului funcției vom determina intersecțiile graficului funcției cu axele.

Intersecția cu Oy este punctul $A(0, f(0))$, adică $A(0, 4)$, iar intersecția cu Ox este punctul $B(x, 0)$, unde $-2x + 4 = 0$, deci $B(2, 0)$. Dreapta AB este reprezentarea grafică a funcției f (vezi figura 24).

$$b) \mathcal{A}_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ (unități de arie).}$$

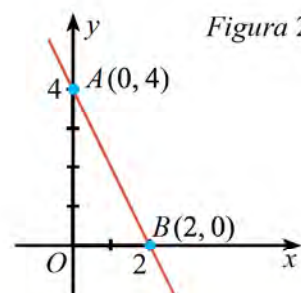


Figura 24



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Care dintre următoarele funcții au reprezentarea grafică o dreaptă? Reprezintă graficul acestora.
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x$;
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2$;
 - c) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$;
 - d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$;
 - e) $f: \{5, 8, 9\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5 - x$.
- 2 Reprezintă grafic următoarele funcții:
 - a) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$;
 - b) $f: \{-2, 2, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$;
 - c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x$;
 - d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2, 5$.
- 3 Determină coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu axele Ox și Oy și apoi reprezintă grafic.
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$;
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.
- 4 Care dintre graficele următoarelor funcții trec prin origine?
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$;
 - b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2\sqrt{2}x$;
 - c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2\sqrt{2}$.
- 5 Determină funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, știind că reprezentarea grafică este dreapta AB , unde $A(0, -5)$ și $B(1, -3)$.
- 6 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = m^2x + m^2 - m$, $m \in \mathbb{R}$. Determină m , știind că:
 - a) graficul lui f trece prin origine;
 - b) graficul lui f coincide cu axa Ox ;
 - c) graficul lui f formează un unghi de 45° cu axa Ox .
- 7 Reprezintă grafic următoarele funcții:
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x$;
 - b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -3x + 6$;
 - c) $h: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -3, 5$.



LECȚIA 4

Funcții de tipul $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde D este un interval nedegenerat

Cu ajutorul următoarelor probleme, ne propunem să arătăm că graficul unei funcții liniare cu domeniul de definiție un interval nedegenerat diferit de $\mathbb{R}$ (caz studiat anterior), este fie o semidreaptă, fie un segment de dreaptă.

Reamintim că prin interval nedegenerat înțelegem un interval în care cele două valori care definesc intervalul nu coincid.



Problemă rezolvată

Reprezintă grafic funcțiile:

$$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3;$$

$$h: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x - 3;$$

$$k: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = x - 3;$$

$$u: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = x - 3.$$

Soluție Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$. Reprezentarea graficului ei este dreapta d care intersectează axa Ox în punctul de abscisă 3 și axa Oy în punctul de ordonată -3 .

Cum domeniul de definiție al funcției f este inclus în cel al funcției g și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in [-1, 2]$, graficul funcției f este inclus în graficul lui g . Graficul lui f conține acele puncte din graficul lui g care au abscisa x în intervalul $[-1, 2]$. Paralelele duse prin punctele $(-1, 0)$ și $(2, 0)$ la axa Oy intersectează dreapta d în punctele $A(-1, -4)$ și $B(2, -1)$. Reprezentarea grafică a funcției f este segmentul AB (vezi figura 25).

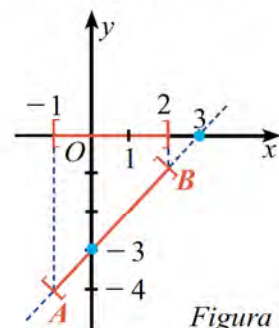


Figura 25

Analog, reprezentările grafice ale funcțiilor h , k și u sunt incluse în graficul lui g . Reprezentarea grafică a funcției h este segmentul deschis (AB) (vezi figura 26).

Reprezentările grafice ale funcțiilor k și u reprezentate în figurile 27 și 28 sunt semidreptele $[BA$ și $[AB$.

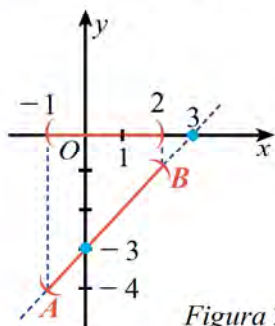


Figura 26

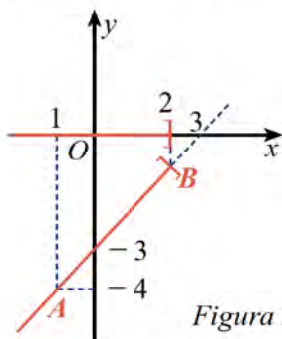


Figura 27

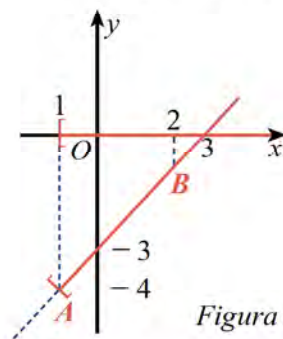


Figura 28

Algoritm pentru reprezentarea graficului funcției liniare $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ interval nedegenerat.

Pentru a reprezenta graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin relația $f(x) = ax + b$ unde D este un interval nedegenerat, procedăm astfel:

- reprezentăm graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, care este o dreaptă;
- reprezentăm pe axa Ox punctele intervalului D , obținând un segment sau o semidreaptă;
- păstrăm din reprezentarea graficului lui g punctele ale căror proiecții pe axa Ox aparțin intervalului D .



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1** Se dă funcția $f: [-2; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$. Care dintre punctele $A(-2; 3)$, $B(0; -1)$, $C(5; 4)$ aparțin graficului funcției?
- 2** Reprezintă grafic funcțiile:
 - a) $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$;
 - b) $f: (-2; 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$;
 - c) $f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3$;
 - d) $f: (-\infty; 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$;
 - e) $f: [-2; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$.
- 3** Se consideră funcția $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 5$. Care este cea mai mică valoare a funcției f ? Dar cea mai mare valoare?
- 4** Dacă $f: [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$, determină perimetrul și aria suprafeței triunghiulare determinate de graficul funcției f și axele de coordonate.
- 5** Se consideră $f: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 1$.
 - a) Arată că $f(0) = g(0)$.
 - b) Reprezintă în același sistem de axe funcțiile f și g .
 - c) Determină perimetrul și aria suprafeței determinate de graficele celor două funcții și axa Ox .
- 6** Determină funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea $f(1 - x) = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$ și apoi reprezintă graficul său.
- 7** Se consideră funcțiile $f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ și $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$.
 - a) Reprezintă în același sistem de axe graficele celor două funcții.
 - b) Graficul funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 1$, intersectează graficele funcțiilor f și g în A , respectiv B . Calculează aria și perimetrul triunghiului AOB .
- 8** Reprezintă grafic funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$.
- 9** Determină $m \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(1, m - 1)$ să aparțină graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$.
- 10** Laturile unui triunghi au lungimile (exprimate în centimetri) egale cu 2, 5 și x .
 - a) Precizează intervalul I în care poate lua valori x .
 - b) Reprezintă grafic funcția $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ unde cu $p(x)$ am notat perimetrul triunghiului.
- 11** Se consideră funcția $f: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Care este cea mai mare valoare a funcției f ?
- 12** Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determină coordonatele punctelor de pe grafic care au:
 - a) abscisa egală cu ordonata;
 - b) abscisa egală cu jumătatea ordonatei;
 - c) ordonata egală cu o treime din abscisă;
 - d) abscisa egală cu dublul ordonatei;
 - e) modulul abscisei egal cu modulul ordonatei.
- 13** Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.
 - a) Află $x \in \mathbb{N}$, pentru care funcția ia valoarea -5 .
 - b) Află $x \in \mathbb{Z}$, pentru care funcția ia valoarea -2 .
 - c) Determină $y \in \mathbb{R}$, știind că punctul $A(3, y)$ aparține graficului funcției.
 - d) Determină $y \in \mathbb{Z}$, știind că punctul $B(-\frac{1}{2}, y)$ aparține graficului funcției.
 - e) Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuația $f(x) = 4$.
 - f) Rezolvă în mulțimea numerelor naturale $f(x) \geq -7$.
- 14** Rezolvă aceleași cerințe ca la problema 13 pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$.
- 15** Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - mx$.
 - a) Determină $m \in \mathbb{R}$, astfel încât graficul funcției să intersecteze axa absciselor în punctul de abscisă 1.
 - b) Pentru $m = 1$, află punctele de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
 - c) Reprezintă grafic funcția în cazul $m = -1$.
 - d) Determină distanța de la originea sistemului de axe la dreapta ce reprezintă graficul funcției de la punctul c).
 - e) Determină aria triunghiului determinat de axele de coordonate și graficul funcției de la punctul c).
 - f) Determină măsura unghiului format de graficul funcției f cu axa ordonatelor în cazul $m = -1$.



LECȚIA 5

Interpretare geometrică

Lecturi grafice

⇒ Verificarea coliniarității unor puncte

Pentru a stabili coliniaritatea a trei sau a mai multor puncte procedăm astfel: determinăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, al cărei grafic conține două dintre punctele date și apoi verificăm dacă și celelalte puncte aparțin graficului acesteia.

Exemplu

Vom arăta că punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ și $C(3, 4)$ sunt coliniare. Pentru aceasta considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Determinăm a și b astfel încât $A(2, 3)$ și $B(-1, 0)$ să aparțină graficului funcției f . Din $A(2, 3) \in G_f$ rezultă $f(2) = 2a + b = 3$; din $B(-1, 0) \in G_f$ rezultă $f(-1) = -a + b = 0$. Din $-a + b = 0$ rezultă $b = a$ și, înlocuind în $2a + b = 3$ obținem, $3a = 3$, deci $a = 1$ și $b = 1$. Avem $f(x) = x + 1$. Verificăm dacă $C(3, 4) \in G_f$. Deoarece $f(3) = 3 + 1 = 4$, rezultă că $C \in G_f$ și atunci A, B, C sunt coliniare.

⇒ Intersecția reprezentărilor grafice a două funcții

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = cx + d$ (unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

Definiție

Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ (unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Punctul $M(x, y)$ este comun graficelor celor două funcții dacă și numai dacă $y = f(x)$ și $y = g(x)$.

REȚINE!

- Abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g se obține rezolvând ecuația $f(x) = g(x)$.
- Dacă ecuația $f(x) = g(x)$ nu are soluții, atunci reprezentările grafice ale funcțiilor f și g sunt drepte paralele.

Exemplu

Funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x$ și $h(x) = x + 2$, au reprezentările grafice în figura 29. A fost aleasă unitatea de măsură egală cu dublul lungimii unei laturi de pătrat din figură.

Pentru funcțiile definite mai sus avem următoarele situații:

- ✓ graficul lui f și graficul lui g se intersectează în punctul $A(1, 1)$, deoarece ecuația $f(x) = g(x)$ are soluția $x = 1$ și, în plus, $f(1) = g(1) = 1$.
- ✓ graficul lui f și graficul lui h se intersectează în punctul $B(0, 2)$, deoarece ecuația $f(x) = h(x)$ are soluția $x = 0$ și $f(0) = 2$.
- ✓ graficele funcțiilor g și h nu au puncte comune, deoarece ecuația $g(x) = h(x)$ nu are soluții. Reprezentările celor două funcții sunt drepte paralele (graficul lui h se poate obține translatând graficul lui g pe direcția axei Oy , în sens pozitiv cu două unități).

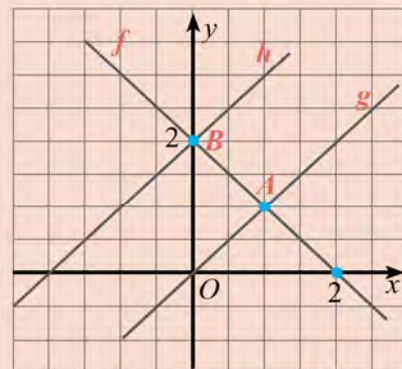


Figura 29



Lecturi grafice

Dacă se cunoaște reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$, atunci din lectura acestuia putem deduce domeniul D , imaginea funcției (mulțimea valorilor), precum și alte proprietăți ale funcției.



Probleme rezolvate

1 În figura 30 este reprezentat graficul unei funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Unitatea de măsură aleasă este egală cu lungimea laturii unui pătrat din figură.

a) Care este domeniul D de definiție al funcției?

b) Alcătuieste tabelul de valori al funcției.

c) Determină imaginea funcției.

Soluție a) Din lectura graficului obținem $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b) Tabelul de valori al funcției este:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3	2	1	2	3	2	1

c) Din tabelul de valori obținem că $\text{Im } f = \{1, 2, 3\}$.

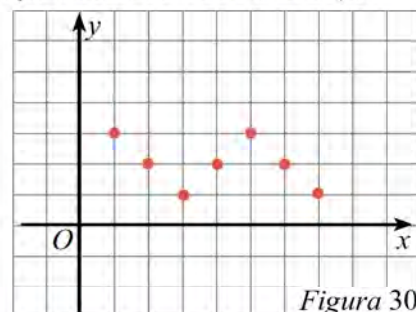


Figura 30

2 Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1$.

a) Determină coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .

b) Calculează aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și axa Ox .

c) Calculează aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și axa Oy .

Soluție a) Rezolvăm ecuația $f(x) = g(x)$ echivalent cu $x + 2 = 4x - 1$, de unde $-3x = -3$, deci $x = 1$, $f(1) = g(1) = 3$. Punctul de intersecție a graficelor este $M(1, 3)$.

b) Graficul funcției f este dreapta AB unde $A(0, 2)$ și $B(-2, 0)$.

Graficul funcției g este dreapta CD unde $C(0, -1)$ și $D(\frac{1}{4}, 0)$ (vezi figura 31).

$$\mathcal{A}_{\triangle BDM} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot MM' = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8} = 3,375 \text{ (unități de arie).}$$

$$\text{c) } \mathcal{A}_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MM'' = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (unități de arie).}$$

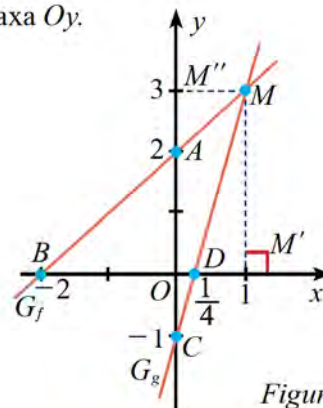


Figura 31



Investigație



Temă

Recomandată pentru lucru în echipe

1 Reprezintă grafic funcțiile $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f_1(x) = 2x + 2$, $f_2(x) = 2x + 3$, $f_3(x) = 2x - 1$ în același sistem de axe. Ce proprietate intuiești?

2 Reprezintă grafic funcțiile $g_1, g_2, g_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $g_1(x) = x + 3$, $g_2(x) = -2x + 3$, $g_3(x) = -x + 3$ în același sistem de axe.

Ce proprietate se poate demonstra?

3 Se consideră funcții de forma $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =$

$$= ax + b_1, g(x) = -\frac{1}{a}x + b_2 \text{ cu } a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

a) Dă exemple de două perechi de funcții (f, g) definite ca mai sus.

b) Reprezintă într-un reper cartezian funcțiile din aceeași pereche, alese la punctul a).

c) Ce proprietate comună observi pentru fiecare pereche de funcții?

d) Demonstrează că proprietatea intuită la punctul c) este adevărată.





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1** Stabilește dacă următoarele puncte sunt coliniare:
 - a) $A(0, -2); B(1, 1); C(-1, 5);$
 - b) $A(1, 1); B(2, 0); C(4, -2).$
- 2** Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + 1$. Reprezintă în același sistem de coordonate graficele celor două funcții și determină coordonatele punctului de intersecție.
- 3** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$.
 - a) Care este aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate?
 - b) Determină măsura unghiului format de graficul funcției și axa absciselor.
- 4** Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 2$.
 - a) Determină coordonatele punctului de intersecție al celor două grafice.
 - b) Determină aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și axa Ox .
 - c) Determină perimetrul patrulaterului convex determinat de graficele celor două funcții și axele Ox și Oy .
- 5** Fie funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + n, m \in \mathbb{Z}, n$ număr natural prim. Determină punctul de pe graficul lui f , de coordonate egale, cu abscisa mai mică decât n , în condițiile în care acesta există.
- 6** Se dau funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{2}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x + \sqrt{2}$.
 - a) Determină măsura unghiului format de graficele celor două funcții și măsura unghiului format de graficul lui f cu axa ordonatelor.
 - b) Calculează aria și perimetrul triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa ordonatelor.
- 7** Arată că reprezentările grafice ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x - 3$ sunt două drepte paralele.
- 8** Se dau funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 8$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -4x + 24$.
 - a) Determină aria și perimetrul triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa absciselor.
 - b) Determină aria triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa ordonatelor.
 - c) Determină tangenta unghiului determinat de graficul lui f și axa absciselor.
- 9** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.
 - a) Determină punctele de pe graficul lui f egal depărtate de axele de coordonate.
 - b) Calculează suma $S = f(5) + f(6) + \dots + f(25)$.
- 10** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x - 2$.
 - a) Arată că $f(2) + f(4) = 32$.
 - b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox , respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy , iar punctul M este mijlocul segmentului AB , calculează perimetrul triunghiului OAM .
- 11** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2-3x}{4}$.
 - a) Arată că media geometrică a numerelor $f(-2)$ și $f(-66)$ este egală cu 10.
 - b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox , respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy , calculează distanța de la punctul O la dreapta AB .
- 12** Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (\sqrt{2} - 1) \cdot x + \sqrt{2}$.
 - a) Care este media aritmetică a numerelor $g(1)$ și $g(3)$?
 - b) Determină numărul m , știind că punctul M , de abscisă m , situat pe graficul funcției g , are ambele coordonate numere raționale.
 - c) Determină coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției g cu prima bisectoare a axelor de coordonate.



LECȚIA 6

Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date)

Statistica este acea parte a matematicii care studiază, culegerea, gruparea, analizarea și interpretarea datelor referitoare la anumite fenomene și oferă unele previziuni privind desfășurarea acestor date în viitor.

Exemplu

Pentru a determina nivelul de pregătire la matematică al unui grup de elevi *se culeg* date cu privire la notele obținute într-o perioadă de timp determinată, date ce conțin anumite caracteristici, precum: frecvența cu care apare fiecare notă, media notelor obținute de fiecare elev și media notelor obținută de întreg grupul de elevi. Astfel, pentru *analiza și interpretarea* datelor culese, un rol important îl are determinarea *tendinței* referitoare la nivelul clasei, tendința exprimată prin *nivelul mediu* de pregătire la disciplina matematică al grupului de elevi studiat.

Conceptele de bază ale statisticii sunt: frecvența relativă și absolută, mărimea statistică, stabilirea unor legături între mărimi, valoarea medie, mediană, modul și amplitudinea unui set de date referitoare la o mulțime numită *populație statistică*.

Definiții

- *Populație statistică* este orice mulțime definită de obiecte de aceeași natură.
- Elementele unei populații se numesc *unități statistice* sau *indivizi*.
- *Caracteristica (variabila statistică)* a populației este trăsătura comună tuturor unităților (indivizilor) populației. Caracteristica poate fi *cantitativă* sau *calitativă*.

În statistică, indicatorii tendinței centrale (de medie) se referă la valorile de mijloc ale unui set de date. Indicatorii de medie cel mai frecvent folosiți sunt *media*, *mediana* și *modulul*, care depind de frecvența datelor statistice.



Frecvența unui set de date

Definiții

- Se numește *frecvență absolută* a unei valori x a caracteristicii numărul de unități ale populației corespunzătoare acestei valori.
- Se numește *frecvență relativă* a unei valori x a caracteristicii raportul dintre frecvența absolută a valorii x și efectivul total al populației.

Exemplu

După un test la matematică, o clasă de 25 de elevi a avut următorul rezultat în ordine alfabetică a elevilor: 7, 6, 8, 9, 5, 10, 4, 5, 4, 6, 7, 5, 5, 4, 4, 10, 8, 7, 9, 4, 6, 6, 4, 5, 4. Atunci, pentru studiul cât mai corect al tendinței medii a clasei, este util să se determine în primul rând frecvența cu care apare fiecare notă (frecvența absolută), iar apoi frecvența relativă. Rezultatele se pot organiza ca în tabelul alăturat:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența absolută	7	5	4	3	2	2	2
Frecvența relativă	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$





Media unui set de date

Primul contact în studiul unui set de date statistice îl vom avea cu *valori medii*. Acestea sunt utilizate frecvent atât în planificare și conducere, cât și în diverse cercetări științifice. Aplicarea corectă a metodei valorilor medii necesită respectarea următoarelor condiții.

- Calcularea mediilor trebuie să se bazeze pe un număr cât mai mare de cazuri individuale.
- Valorile din care se va calcula media să fie omogene.
- Alegerea celui tip de medie care corespunde cel mai bine caracteristicii studiate.

Exemplu

Să revenim la tabelul din exemplul dat la frecvența absolută.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența absolută	7	5	4	3	2	2	2

Calculând media aritmetică a notelor obținute, avem $m_{\text{aritmetică}} = \frac{4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{7} = 7$. Acest rezultat ar fi fost sugestiv dacă toate notele aveau aceeași frecvență. Ținând cont de realitate, media ponderată oferă un rezultat mai „exact” al mediei notelor obținute.

$$\text{Astfel } m_{\text{ponderată}} = \frac{7 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{25} = 6,08.$$

Dacă în cazul mediei aritmetice am putea spune că nivelul de pregătire al elevilor a fost mediu (media este 7), în cazul mediei ponderate concluzia este că nivelul de pregătire este cu mult mai scăzut decât cel mediu, puțin peste cel de promovare.

REȚINE!

Media nivelurilor individuale ale unei variabile (caracteristică) statistice este expresia sistematizării într-un singur nivel reprezentativ a tot ceea ce este esențial, tipic și obiectiv în dezvoltarea acestuia.



Mediana unui set de date

Definiție

Mediana este valoarea ce împarte în două o *colecție ordonată* de date. Numărul valorilor variabilelor mai mici decât mediana este egal cu numărul valorilor mai mari decât aceasta.

REȚINE!

- Dacă setul de date conține un număr impar de valori ordonate, atunci mediana coincide cu valoarea din mijlocul ordonării.
- Dacă setul de date conține un număr par de valori ordonate, atunci mediana este media aritmetică a perechii din mijloc.

Exemplu

La Olimpiada de Matematică, unde punctajul maxim este de 28 de puncte, au fost obținute de către elevii clasei a VIII-a următoarele punctaje: 18, 23, 16, 10, 27, 15, 20. Ordonând punctajele crescător obținem: 10, 15, 16, 18, 20, 23, 27. Deoarece numărul de date este impar, deducem că mediana este 18, adică termenul din mijloc al ordonării. După contestație setul de date se modifică astfel: 18, 23, 17, 10, 27, 20, 22, 24. Ordonând crescător noul set de date, avem: 10, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 27. Deoarece noul set de date este în număr par, iar termenii din mijloc sunt 20 și 22, mediana noului set este media aritmetică a celor două valori, adică 21.





Modulul (dominanta) unui set de date

Definiție

Modulul (dominanta) reprezintă valoarea caracteristicii care are frecvența cea mai mare.

Comentariu

În practică se pot întâlni următoarele situații:

- setul de date conține o singură dominantă;
- setul de date conține mai multe valori dominante;
- dacă toate variabilele au aceeași frecvență de apariție, vom spune că setul de date nu conține o valoare caracteristică.

Exemplu

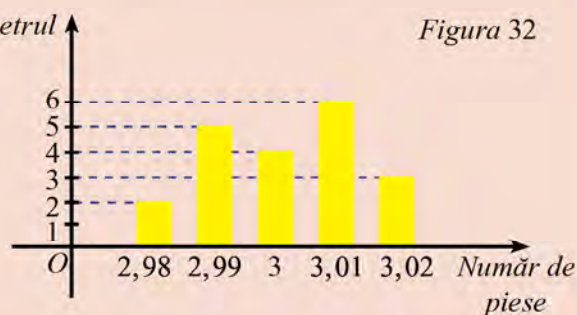
La un centru de calitate a produselor, se verifică diametrul pieselor prelucrate de un strung. Pentru realizarea acestui control s-a verificat o selecție de 20 de piese. Rezultatele au fost înregistrate în tabelul următor:

Număr de piese	2	5	4	6	3
Diametrul (în mm)	2,98	2,99	3	3,01	3,02

Reprezentarea grafică cu coloane a datelor din tabel este realizată în figura 32. Avem deci 20 de piese. Conform definiției medianei din cele 20 de piese cele două din mijloc adică piesele cu numărul 10 și 11 au ambele diametrul de 3 mm, deci mediana setului este egală cu 3.

Diametrul

Figura 32



Amplitudinea unui set de date

Definiție

Amplitudinea unui set de date este diferența dintre valorile maxime și minime a setului de date măsurate.

Comentariu

Amplitudinea, fiind calculată numai pe baza valorilor extreme de tip numeric ale setului de date, nu oferă posibilitatea cunoașterii structurii interioare a colectivității. În cazul în care valorile extreme sunt nesemnificative numeric, rezultatul ne poate conduce la concluzii greșite. Așadar, amplitudinea unui set de date depinde de valori măsurate și nu de frecvența acestor valori.

Exemplu

În figura 33 prezentăm trei seturi de date cu aceeași amplitudine, dar cu structură internă diferită. Cele trei seturi de date se referă la rezultatele obținute la Olimpiada de Matematică de către cei nouă reprezentanți ai celor trei clase diferite. În acest exemplu $x_{\min} = 5$, iar $x_{\max} = 9,80$. Pentru fiecare din cele trei seturi

de date amplitudinea este egală cu 4,80. Din studiul reprezentărilor deducem, în plus, că elevii clasei a VIII-a B au obținut cele mai bune rezultate, în timp ce elevii clasei a VIII-a C au obținut rezultatele cele mai slabe.

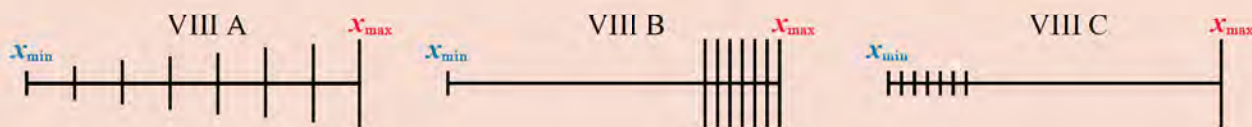


Figura 33



Problemă rezolvată

Sebastian își propune să afle câteva date statistice ale ultimelor 20 de note obținute în anii precedenți la matematică. Aceste note au fost:

7	8	6	6	5	9	8	9	6	4
7	9	10	6	5	8	7	9	9	10

- Reprezintă poligonul frecvențelor.
- Determină media, mediana și dominantă setului de date.

Soluție a) Grupând datele după frecvențele apariției obținem datele următoare:

<i>Nota</i>	4	5	6	7	8	9	10
<i>Frecvența</i>	1	2	4	3	3	5	2

Poligonul frecvențelor este cel din figura 34:

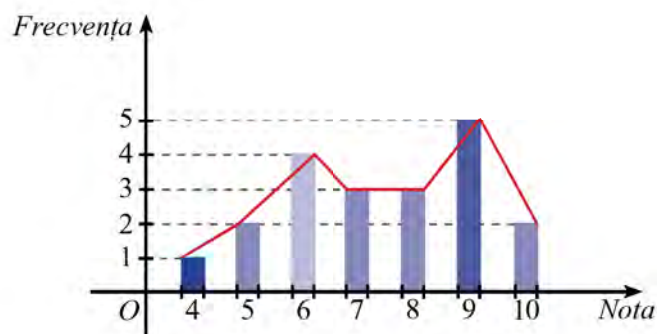


Figura 34

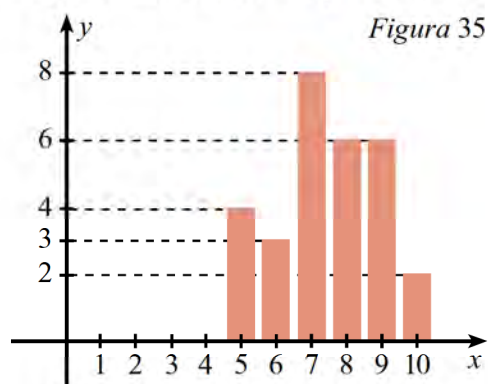
- Media notelor obținute este: $\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{20} = 7,04$.

Scriind crescător toate valorile, a zecea și a unsprezecea valoare (adică valorile din mijloc) sunt 7 și 8, deci mediana (media aritmetică a acestor două valori) este 7,5. Valoarea cu cea mai mare frecvență este 9 care este dominantă setului de date.

**FIXARE****EXERSARE****CONSOLIDARE****PROBLEME**

- 1** Următoarea diagramă cu batoane prezintă mediile obținute de elevii unei clase la geografie în clasa a VIII-a.

- a) Alcătuiește tabelul frecvențelor statistice.
b) Determină media, mediana și modulul.



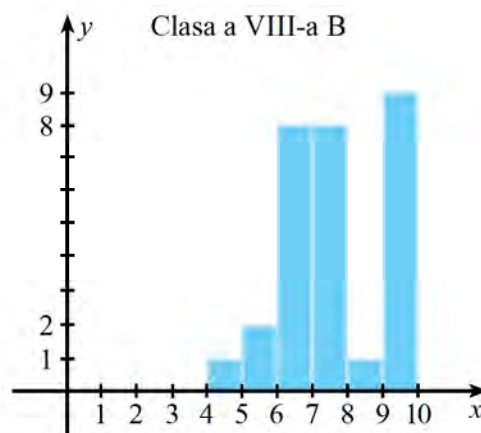
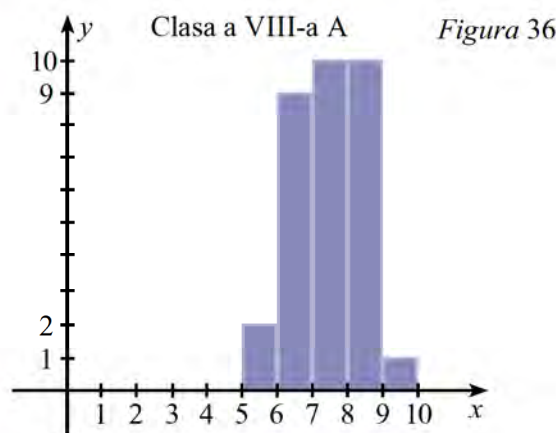
- 2** La examenul de Evaluare Națională, cei 300 de elevi ai unei școli au obținut la proba de matematică următoarele rezultate:

Nota	Numărul de elevi
5 – 5,49	4
5,50 – 5,99	6
6 – 6,49	14
6,50 – 6,99	20
7 – 7,49	64
7,50 – 7,99	103
8 – 8,49	27
8,50 – 8,99	39
9 – 9,49	15
9,50 – 10	8

- a) Reprezintă graficul cu bare și determină poligonul frecvențelor.
b) Determină media, mediana și dominantă.
- 3** În primele 15 zile ale lunii iulie, temperatura la Craiova, la ora 14, a înregistrat următoarele valori:

$31^{\circ}, 32^{\circ}, 32^{\circ}, 33^{\circ}, 35^{\circ}, 38^{\circ}, 30^{\circ}, 31^{\circ}, 30^{\circ}, 28^{\circ}, 29^{\circ}, 34^{\circ}, 35^{\circ}, 36^{\circ}$. Alcătuiește diagrama (reprezentarea grafică) acestui set de date.

- 4** Reprezentările din *figura 36* exprimă mediile generale obținute de elevii claselor a VIII-a A și a VIII-a B în anul trecut.



- a) Care clasă este mai bună la matematică?
b) Care este mediana, modulul și amplitudinea datelor pentru fiecare clasă în parte?
c) Alcătuiește diagrama corespunzătoare elevilor celor două clase luate împreună. Compară în acest caz mediana, modulul și amplitudinea cu cele corespunzătoare obținute la punctul b).

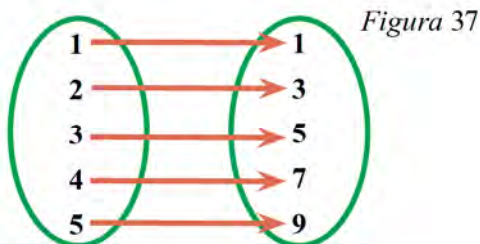


PROBLEME RECAPITULATIVE

1 Considerăm funcția

$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
definită prin diagrama din figura 37.

- Realizează tabelul de valori al funcției.
- Găsește relația matematică ce exprimă dependența dintre x și $f(x)$.



2 Considerăm funcția

$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{11, 12, 13, 14\}$,
având următorul tabel de valori:

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	12	13	14

Exprimă corespondența:

- printr-o diagramă;
 - printr-o relație matematică.
- 3** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -ax + 5$.
Determină valoarea lui $a \in \mathbb{R}$, știind că punctul $A(-5, 20)$ aparține graficului funcției.
- 4** Reprezintă grafic funcțiile
- $f: \{0, 1, 2, 3, -3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x$;
 - $g: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x| - 3$.
- 5** Stabilește care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = -x^2 + 3$:
 $A(0, 3)$; $B(\sqrt{3}, 0)$; $C(3, -3)$; $D(-4, -13)$;
 $E(-2, 7)$.
- 6** Se dă funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = -2x + 3$.

- Determină punctul de pe graficul funcției care are abscisa egală cu -4 ;

- Determină punctul de pe graficul funcției care are ordonata egală cu -5 ;
- Determină punctul de pe graficul funcției care are coordonatele egale.

7 Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$, o funcție liniară. Demonstrează că:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
- $f(kx) = kf(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde $k \in \mathbb{R}$.

8 Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 9$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, ale căror grafice se intersectează în punctul $A(3, 18)$.

- Determină distanțele de la originea O a sistemului de coordonate la graficele celor două funcții.
- Calculează aria și perimetrul triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa absciselor.

9 Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ și $C(-3, a)$ să fie coliniare.

10 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{6}x - \sqrt{2}$.

- Determină aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.
- Calculează distanța de la originea sistemului de coordonate la graficul lui f .
- Determină tangenta unghiului format de graficul lui f cu axa Ox .

11 Considerăm funcțiile $f, g, u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin relațiile $f(x) = 2$, $g(x) = -1$, $u(x) = x + 1$, $v(x) = x - 3$.

- Reprezintă grafic cele patru funcții în același sistem de axe.
- Demonstrează că punctele de intersecție ale graficelor sunt vârfurile unui paralelogram.
- Calculează aria acestui paralelogram.

12 Reprezintă grafic funcțiile:

- $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$;
- $g: (5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -4x + 19$.

13 Determină mulțimea valorilor funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 1$.



14 Se consideră funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Determină intervalul I și numerele reale a și b , știind că graficul funcției f este segmentul închis AB , unde $A(0, 3)$ și $B(3, 12)$.

15 Reprezintă grafic funcțiile:

$$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - x;$$

$$g: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4 - x;$$

$$h: (1, 4) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 4 - x;$$

$$u: [1, \infty) \cap (1, 4) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = 4 - x;$$

$$v: (-\infty, 4] \rightarrow \mathbb{R}, v(x) = 4 - x.$$

16 Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile de 6 cm și x cm. Reprezintă grafic funcția $A: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A(x)$ reprezintă aria triunghiului exprimată în cm^2 .

17 Un excursionist parcurge un traseu cu viteza constantă de 4 km/oră. Reprezintă grafic funcția $d: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $d(t)$ este distanța parcursă în timpul t .

18 Considerăm funcția $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}$ prin care fiecărui element al mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ îi corespunde numărul divizorilor săi naturali. Realizează tabelul de valori și reprezintă grafic funcția. Precizează imaginea funcției.

19 Reprezintă grafic funcția $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{N}$, unde, pentru fiecare $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(n)$ reprezintă restul împărțirii lui n la 3.

20 Alcătuieste tabelul de valori al funcției al cărei grafic este reprezentat în figura 38. Găsește domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției.

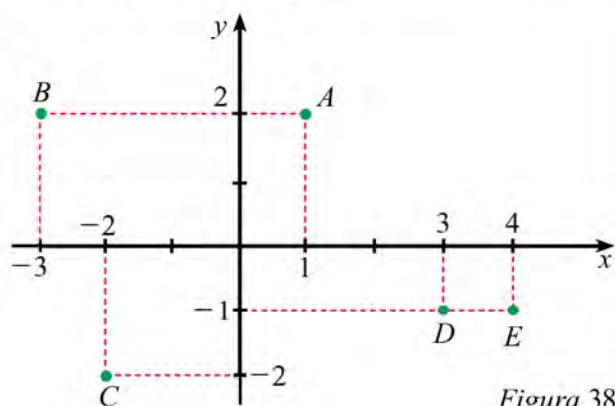


Figura 38

21 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$.

a) Determină numărul real a cu proprietatea $f(a) = 1$.

b) Determină numărul real b cu proprietatea $f(b) + f(2b) = \frac{11}{2}$.

c) Determină numerele reale m , știind că punctul $M\left(m^2; \frac{m}{4}\right)$ se află pe graficul funcției f .

22 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$.

a) Calculează numărul

$$P = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot f\left(\frac{3}{3}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{10}{3}\right).$$

b) În sistemul de axe ortogonale xOy , determină distanța de la punctul $C(0, 2)$ la reprezentarea grafică a funcției f .

23 Se consideră funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 4x - 3$.

a) Arată că numărul $\frac{h(\sqrt{2}) - h(\sqrt{3})}{\sqrt{18} - \sqrt{27}}$ este rațional.

b) În sistemul de axe ortogonale xOy , calculează sinusul unghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox .

24 Se consideră funcțiile

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0,2x + 0,4 \text{ și } g(x) = x + 5.$$

a) Reprezintă grafic funcțiile f și g în același sistem de axe ortogonale xOy .

b) Demonstrează că reprezentările grafice ale funcțiilor f și g sunt două drepte paralele.

25 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$.

a) Calculează media aritmetică a numerelor $f(4)$ și $f(8)$.

b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctele A și B care sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox , respectiv Oy . Află coordonatele punctului C cu proprietatea că patrulaterul $OACB$ este dreptunghi (vezi figura 39).

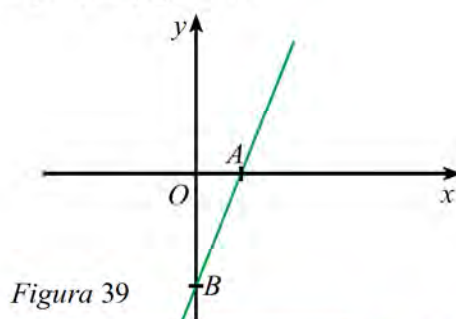


Figura 39



TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Se consideră $f: \{-1, 0, 1, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3$. Dacă $M(4, a) \in G_f$, atunci valoarea lui a este ...
- 5p 2 Dacă $f: \{-1, 1, 2\} \rightarrow \{a, 0, 2\}$, $f(x) = x + 1$, este o funcție, atunci numărul a este egal cu ...
- 5p 3 Dacă graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + 3$, trece prin $A(3, 6)$, atunci numărul m este egal cu ...
- 5p 4 Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x-1) + f(x+1) = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $f(1) + f(-1) = \dots$
- 5p 5 Punctul $A(m; m-1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, pentru m egal cu ...
- 5p 6 Dacă $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, numărul de elemente al mulțimii $\text{Im } f$ este ...

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 1)x + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$. Valoarea lui m pentru care reprezentarea grafică este o dreaptă paralelă cu Ox este:
A. 2 B. -2 C. 1 sau -1 D. 0
- 5p 2 Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, și $f(x+2) = 5x + 2 - 2f(1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci $f(1)$ este egal cu:
A. 1 B. -1 C. 0 D. 2
- 5p 3 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$. Numărul $f(-1) + f(1)$ este egal cu:
A. 0 B. 3 C. 2 D. 6
- 5p 4 Reprezentarea grafică a funcției $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ este:
A. o dreaptă B. o semidreaptă C. un segment D. un triunghi
- 5p 5 Numărul de funcții $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietățile $f(1) = 1$ și $f(2) = 3$ este:
A. 7 B. 5 C. 1 D. 6
- 5p 6 Numărul real m pentru care punctul $M(3, m-3)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$ este:
A. -1 B. 1 C. 4 D. 0

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

- 10p 1 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.
a) Determină numerele reale a și b , știind că reprezentarea grafică a funcției este dreapta AB cu $A(0, 2)$ și $B(-1, 1)$.
b) Pentru $a = 1$ și $b = 2$, determină coordonatele punctului de intersecție dintre dreapta AB și axa Ox .
c) Pentru $a = 1$ și $b = 2$, află distanța de la originea sistemului de axe la dreapta AB .
- 10p 2 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2 - \sqrt{5})x + \sqrt{5}$.
a) Arată că $A(1, 2) \in G_f$.
b) Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x) - 2 \geq 0$.
c) Determină numerele raționale a și b , știind că punctul $M(a; b + b\sqrt{5})$ se află pe graficul lui f .
- 10p 3 Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$.
a) Reprezintă grafic funcțiile f și g în același sistem de coordonate.
b) Determină măsura unghiului dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g .
c) Calculează suma $S = f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots + f(19) - f(20)$.



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera **A**, în caz contrar, încercuiește litera **F** (20 de puncte).

5p 1 Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$, atunci $f(-2) = 9$.

A F

5p 2 Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 1$, atunci $G_f \cap Ox = A\left(\frac{1}{5}; 0\right)$.

A F

5p 3 Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{2}x + \sqrt{3}$, atunci $G_f \cap Oy = B(0; \sqrt{3})$.

A F

5p 4 Probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5 este egală cu $\frac{17}{90}$.

A F

SUBIECTUL al II-lea. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect din coloana **B** (20 de puncte).

A

B

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 3$.

a. 2

5p 1 Rezultatul calculului $f\left(\frac{1}{10}\right) \cdot f\left(\frac{2}{10}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{10}{10}\right)$ este egal cu ...

b. 0

5p 2 Soluția ecuației $f(x) = f(2x - 7)$ este $x = \dots$

c. 1

5p 3 Dacă punctul $M(m; 2\,025)$ aparține graficului funcției f , atunci $m = \dots$

d. $-\frac{2\,022}{5}$

5p 4 Numărul natural nenul a cu proprietatea $f(a) + 7 > 0$ este ...

e. 7

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

1 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.

10p

a) Arată că $2 \cdot f(4) + f(8) = f(12)$.

10p

b) Reprezintă grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy .

10p

c) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A , respectiv B . Determină distanța de la punctul $P(0, -2)$ la dreapta AB .

2 Se consideră punctele $C(1; -1)$ și $D(4; 8)$.

10p

a) Determină funcția f care are ca reprezentare grafică dreapta CD .

10p

b) Determină numărul real a pentru care punctele C , D și E , $E(a; a+1)$, sunt coliniare.

 Descarcă din manualul digital, apoi completează fișa de observare a unității.

4

ELEMENTE ALE
GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

UNITATEA

LECȚIA 1

Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări

Geometria este una dintre cele mai vechi ramuri ale matematicii. Primele cunoștințe de geometrie, vechi de câteva milenii, aveau un caracter practic. În Babilon și în Egiptul antic, cunoștințele de geometrie erau folosite în agricultură, construcții, astronomie. Adevărurile geometrice erau obținute și verificate în mod experimental. În Grecia antică, începând cu *Thales* și continuând cu *Pitagora*, *Euclid*, *Arhimede*, matematicienii au devenit preocupați de stabilirea adevărurilor prin raționament logic.

În cartea sa *Elementele* (carte scrisă în secolul III î.Hr. și care a dominat matematica elementară timp de peste două milenii), *Euclid* a sistematizat cunoștințele de specialitate acumulate în perioadele precedente, prezentându-le în înălțuirea lor logică și realizând demonstrațiile teoremelor pe baza unui sistem de axiome.

Edificiul geometriei are la bază *noțiunile primare* și *axiomele*. *Noțiunile primare* (*fundamentale*) sunt noțiuni care nu pot fi definite. *Axiomele* sau *postulatele* sunt propoziții al căror adevăr este evident sub aspect intuitiv și care nu se demonstrează.

Punctul, *dreapta*, *planul*, *spațiul* sunt noțiuni geometrice fundamentale. Ele nu pot fi definite în mod riguros, dar pot fi înțelese sau descrise pornind de la imagini din realitatea înconjurătoare. Astfel, urma lăsată de vârful unui creion bine ascuțit pe o foaie de hârtie ne poate da imaginea unui *punct*. Un fir de ață subțire, bine întins, prelungit la nesfârșit în ambele sensuri, ne dă imaginea unei *drepte*. Suprafața tablei de scris, prelungită la nesfârșit în toate direcțiile constituie o imagine despre ceea ce numim *plan*.

În clasele precedente, în capitolele de geometrie ați studiat proprietăți ale unor figuri geometrice (cum sunt dreapta, segmentul, semidreapta, unghiul, triunghiul, patrulaterul, cercul) incluse într-un plan dat. Capitolele de geometrie studiate până în prezent fac obiectul *geometriei plane*. Cubul sau paralelipipedul dreptunghic, cu care ați făcut deja cunoștință, sunt corpuri geometrice care nu pot fi incluse într-un plan. Studiul lor și cel al altor corpuri geometrice fac obiectul *geometriei în spațiu*. În limbajul obișnuit, prin spațiu înțelegem tot ce ne înconjoară.

Spațiul geometric este o mulțime de puncte pe care o vom nota cu S . În geometria în spațiu se păstrează convențiile de desen și de notație folosite în geometria plană.



Euclid-matematician grec
323-285 î.Hr.

- Punctele se reprezintă ca în figura 1 și se notează cu litere mari ale alfabetului latin.



Figura 1

- Dreptele se notează cu litere mici $a, b, c \dots$ sau AB, CD etc. (Vezi figura 2).

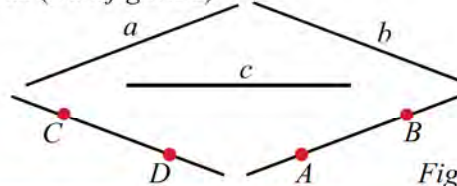


Figura 2

● În spațiu există o infinitate de puncte, drepte și plane. Planele se notează cu litere mici ale alfabetului grecesc α, β, γ și se reprezintă prin desen ca în figura 3.

● În geometria plană, realizarea desenelor nu ridică probleme deosebite. Nu același lucru se întâmplă în cadrul geometriei în spațiu.

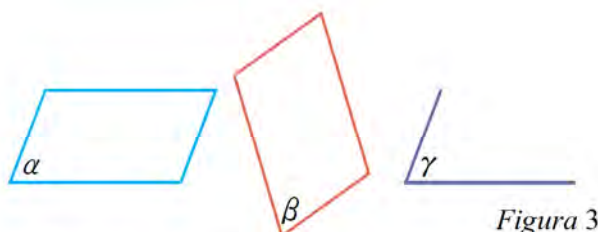


Figura 3



Figura 4

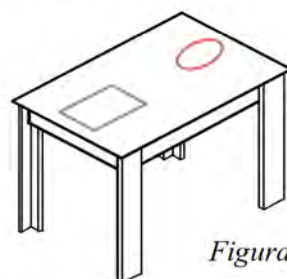


Figura 5

Dificultatea constă în faptul că trebuie să reprezentăm în plan imaginea unei figuri spațiale. Desenul, asemenea unei fotografii, depinde de poziția din care este privită figura spațială.

Să privim în jurul nostru. Presupunem că pe o masă se află o farfurie rotundă și o coală de hârtie dreptunghiulară, astfel încât, privind de sus, vedem imaginea din figura 4. Atunci imaginea mesei, văzută din față, este cea din figura 5.

Pentru a realiza desenele unor figuri spațiale, ținem seama de unele convenții:

- figurile situate în plan vertical în fața privitorului se reprezintă în forma lor reală;
- segmentele care au direcția razei virtuale, se reprezintă înclinat și de lungime mai mică în raport cu lungimea reală;
- reprezentările în desen ale unor drepte paralele sunt, de asemenea, paralele;
- elementele care „nu se văd” se reprezintă punctat.

Exemplu

În figura 6 este desenat un cub. Pătratele $ABB'A'$ și $CDD'C'$, situate în plan vertical în fața noastră, sunt redată în desen în forma lor reală. Segmentele $BC, AD, B'C', A'D'$, având direcția razei virtuale, sunt desenate înclinat și de lungime mai mică. Segmentele AD, CD și DD' nu se văd, deci sunt reprezentate punctat.

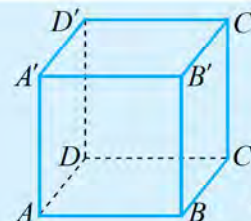


Figura 6

REȚINE!

Dreptele, planele, spațiul sunt mulțimi de puncte. Prin urmare, relațiile dintre puncte, drepte și plane se pot exprima în limbajul teoriei mulțimilor.

Exemplu

În figura 7 paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ este așezat pe un plan orizontal α .

Între elementele figurii putem stabili diferite relații, ca de exemplu:

- punctul A este situat pe dreapta AB (scriem: $A \in AB$);
- punctul C nu este situat pe dreapta AB (scriem: $C \notin AB$);
- punctul D este situat în planul α (scriem: $D \in \alpha$);
- punctul B' nu este situat în planul α (scriem: $B' \notin \alpha$);
- dreapta AB este inclusă în planul α (scriem: $AB \subset \alpha$);
- dreapta AA' nu este inclusă în planul α (scriem: $AA' \not\subset \alpha$);
- dreptele AB și AD se intersectează în punctul A (scriem: $AB \cap AD = \{A\}$);
- dreapta BB' intersectează planul α în punctul B (scriem: $BB' \cap \alpha = \{B\}$);
- dreptele AB și $A'B'$ nu au puncte comune (scriem: $AB \cap A'B' = \emptyset$).

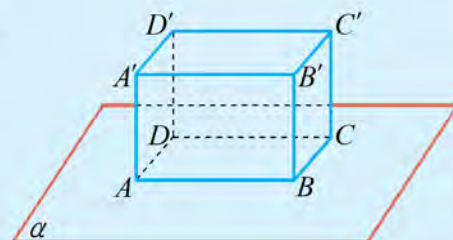


Figura 7



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Dă exemple de paralelipipede dreptunghice pe care le întâlnim în realitatea înconjurătoare.
- 2 Care este numărul minim de culori necesare pentru a colora fețele unui cub, dacă oricare două fețe alăturate ale cubului sunt colorate diferit?
- 3 Se consideră trei puncte distincte A, B și C situate într-un plan α și două puncte distincte M și N nesituate în planul α . Care este numărul minim de drepte determinate de câte două dintre aceste puncte? Dar numărul maxim?
- 4 În figura 8, identifică desenele care reprezintă aceeași figură geometrică, văzută din poziții diferite.

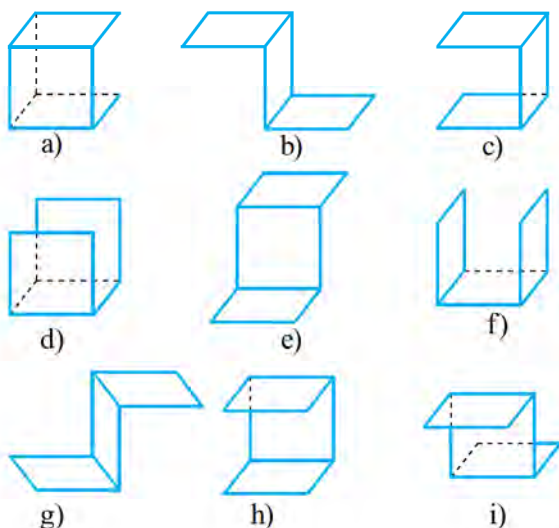


Figura 8

- 5 Desenează un cub $MNPQM'N'P'Q'$, având baza $MNPQ$ situată într-un plan orizontal γ . Stabilește relații între elementele figurii și exprimă-le în limbaj matematic, folosind simbolurile $\in, \notin, \subset, \not\subset$.
- 6 Se consideră punctele distincte A, B, C, D și E situate într-un plan α și un punct P nesituat în planul α .
 - a) Determină numărul minim de drepte determinate de aceste puncte.
 - b) Determină numărul maxim de drepte determinate de aceste puncte.

- 7 Câte paralelipipede dreptunghice mici cu aceleași dimensiuni, sunt în figura 9?

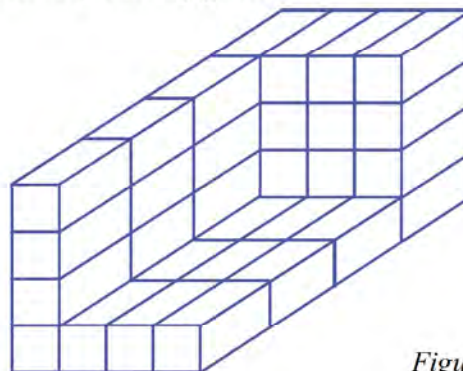


Figura 9

- 8 Un cub cu latura de 3 cm, colorat cu albastru, este împărțit în 27 de cubulețe identice cu muchia de 1 cm.
 - a) Câte cubulețe au o singură față colorată cu albastru?
 - b) Câte cubulețe au exact două fețe colorate cu albastru?
 - c) Câte cubulețe au exact trei fețe colorate cu albastru?
- 9 Desenează configurația geometrică formată din punctele distincte M, N, P, Q , situate în planul α , punctul S nesituat în planul α , dreptele d_1 și d_2 incluse în planul α , $d_1 \cap d_2 = \{M\}$, $P \in d_1$, $Q \in d_2$, $N \notin d_1$ și $N \notin d_2$.
- 10 În figura 10 sunt reprezentate patru puncte M, A, T și E , nesituate în același plan, astfel încât $MA = MT = ME = AT = AE = TE$. Calculează $\angle AMT + \angle EMT + \angle AME$.

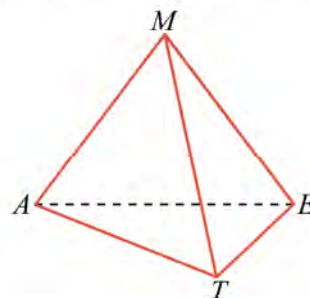


Figura 10



LECȚIA 2

Determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane

Cele mai simple relații între puncte, drepte și plane pot fi descrise cu ajutorul *axiomelor*.

⇒ Determinarea dreptei

Una dintre axiomele geometrice plane afirmă că două puncte distincte din plan determină o dreaptă. Înțelesul acestei axiome este următorul: oricare ar fi două puncte distincte, *există* o dreaptă care le conține și această dreaptă este *unică*. Axioma rămâne adevărată și în spațiu.

A_1 : Două puncte distincte determină o dreaptă.

Dreapta determinată de punctele A și B se notează AB .

Consecință a axiomei A_1 : dacă două drepte au două puncte distincte comune, atunci ele coincid.

⇒ Poziția unei drepte față de un plan

Dacă așezăm o riglă astfel încât ambele capete ale sale să se afle în planul tablei, atunci rigla se va afla în întregime în planul tablei.

A_2 : Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de aceste puncte este inclusă în acel plan.

Această axiomă poate fi formulată în limbaj matematic astfel: $A \neq B, A \in \alpha, B \in \alpha$, atunci $AB \subset \alpha$ (vezi figura 11).

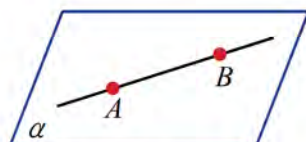


Figura 11

Din axioma A_2 deducem că o dreaptă se poate afla față de un plan în următoarele poziții:

- dreapta nu are niciun punct comun cu planul;
- dreapta are un singur punct comun cu planul (dreapta „înțepă planul”);
- dreapta este inclusă în plan.

Exemplu

Dacă notăm cu α planul în care se află baza $ABCD$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, atunci dreapta $A'B'$ nu are niciun punct comun cu planul α , dreapta AA' intersectează planul α într-un singur punct, iar dreapta AB este inclusă în planul α (vezi figura 12).

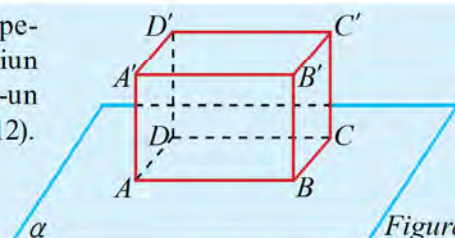


Figura 12

⇒ Intersecția a două plane

Este posibil ca două plane să aibă exact un punct comun?

Pentru a răspunde la această întrebare, să considerăm planul caietului colorat în albastru în planul (notat cu α) și planul mesei (notat cu β). Dacă așezăm caietul ca în figura 13, cele două plane nu vor avea în comun doar punctul A , pentru că planele sunt nemărginite. Cele două plane se intersectează după o dreaptă ce trece prin punctul A .

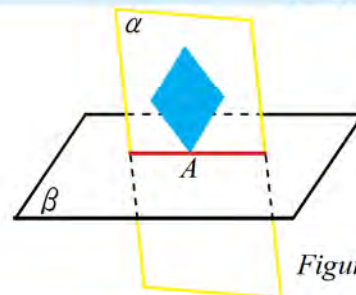


Figura 13

A_3 : Dacă două plane au în comun un punct, atunci ele se intersectează după o dreaptă care trece prin acel punct.



Determinarea planului

Câte plane se pot duce prin două puncte date? Pentru a răspunde la această întrebare, ne imaginăm o ușă care se deschide, ocupând diverse poziții, fiecare poziție corespunzând unui plan care trece prin două puncte fixe (puncte reprezentate prin balamalele ușii). Putem spune așadar că prin două puncte date trec o infinitate de plane.

Prin urmare, două puncte distincte nu sunt suficiente pentru a determina un singur plan.

Dacă se dau în spațiu trei puncte necoliniare, există un plan care le conține și acest plan este unic.

A_4 : Trei puncte necoliniare determină un plan.

Planul determinat de punctele A, B, C se notează cu (ABC) și se citește „planul ABC ”.

Consecință a axiomei A_4 : dacă două plane au trei puncte necoliniare comune, atunci ele coincid.

Definiții

- Patru sau mai multe puncte situate în același plan se numesc *puncte coplanare*.
- Două sau mai multe drepte situate în același plan se numesc *drepte coplanare*.

Folosind axioma A_4 se poate demonstra o propoziție care exprimă alte posibilități de a determina un plan.

Propoziții

- O dreaptă d și un punct A , exterior dreptei, determină un singur plan care se notează: (d, A) .
- Două drepte concurente d_1 și d_2 determină un singur plan care se notează: (d_1, d_2) .
- Două drepte paralele d_1 și d_2 determină un singur plan care se notează: (d_1, d_2) .



Poziția relativă a două drepte

- Două drepte distincte situate în același plan sunt sau concurente, sau paralele. În spațiu există însă și drepte necoplanare.
De exemplu, dacă $ABCD A'B'C'D'$ este un cub, dreptele AA' și BC sunt necoplanare (vezi figura 14).
- Două drepte necoplanare nu sunt nici concurente, nici paralele.

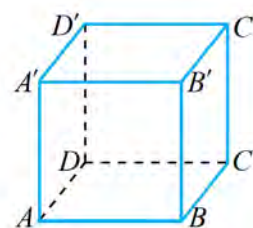
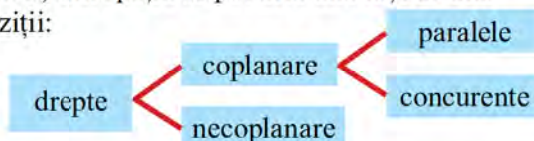


Figura 14

REȚINE!

Două drepte (distincte) din spațiu se pot afla una față de alta în următoarele poziții:



Axioma paralelelor sau postulatul lui Euclid spune:

A_5 : Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată.

A_6 : Există cel puțin patru puncte necoplanare.



Probleme rezolvate

- 1 Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și M un punct care nu aparține planului (ABC) . Demonstrează că planele (MAD) și (MBC) au o dreaptă comună și determină această dreaptă.

Soluție Planele (MAD) și (MBC) au în comun punctul M , deci se intersectează după o dreaptă care trece prin M . Pentru a determina dreapta trebuie să găsim încă un punct al ei. Dreptele AD și BC se intersectează într-un punct E (vezi figura 15).

Din faptul că $E \in AD$ și $AD \subset (MAD)$, rezultă că $E \in (MAD)$.

Din faptul că $E \in BC$ și $BC \subset (MBC)$, rezultă că $E \in (MBC)$.

Planele (MAD) și (MBC) au în comun punctele M și E , deci intersecția lor este dreapta ME .

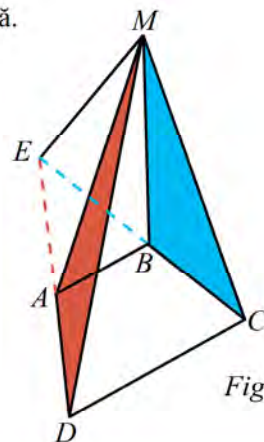


Figura 15

- 2 Considerăm, în spațiu, triunghiurile ABC și DEF nesituate în același plan, astfel încât dreptele AB și DE se intersectează în punctul M , dreptele AC și DF se intersectează în punctul N , iar dreptele BC și EF se intersectează în punctul P . Demonstrează că punctele M, N, P sunt coliniare (vezi figura 16).

Soluție $M \in AB$ și $AB \subset (ABC)$, deci $M \in (ABC)$; $M \in DE$ și $DE \subset (DEF)$, deci $M \in (DEF)$. Analog se arată că punctele N și P aparțin atât planului (ABC) , cât și planului (DEF) . Dacă punctele M, N, P ar fi necoliniare, atunci planele (ABC) și (DEF) ar coincide, ceea ce contrazice ipoteza. Deci M, N, P sunt coliniare.

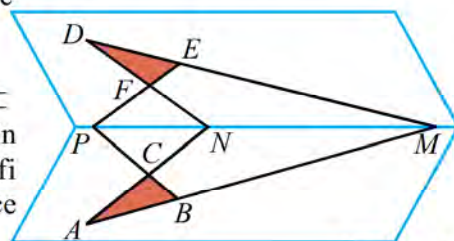


Figura 16

- 3 Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul E care nu aparține planului (ABC) . Determină intersecția planelor (EAC) și (EBD) (vezi figura 17).

Soluție Notăm $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $O \in AC$ și $AC \subset (EAC)$, rezultă că $O \in (EAC)$. Deoarece $O \in BD$ și $BD \subset (EBD)$ rezultă că $O \in (EBD)$. Obținem că $O \in (EAC) \cap (EBD)$. Planele (EAC) și (EBD) au în comun punctele E și O , deci intersecția lor este dreapta EO .

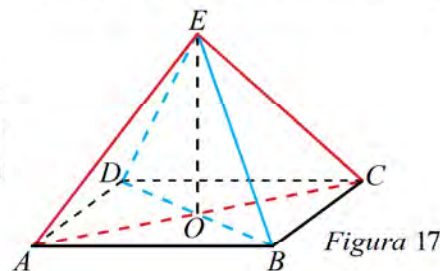


Figura 17

- 4 Se consideră în spațiu cinci puncte A, B, C, D și E astfel încât oricare trei dintre ele sunt necoliniare. Află probabilitatea ca, dacă luăm la întâmplare o dreaptă determinată de două dintre cele 5 puncte, aceasta să nu treacă prin punctul A .

Soluție Notăm $P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$.

Sunt 10 cazuri posibile (dreptele $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE$ și DE) și 6 cazuri favorabile (dreptele BC, BD, BE, CD, CE și DE), deci $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 a) Câte drepte trec printr-un punct A ?
b) Câte plane trec prin două puncte distincte?

- 2 În desenul din figura 18 punctele $A, B \in \alpha, C \in AB, D \in \alpha$.

- a) Care este poziția punctului C față de planul α ?
b) Care este poziția dreptei CD față de planul α ?

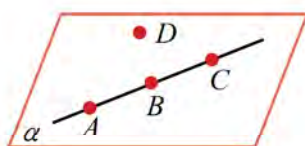


Figura 18

- 3 Se consideră punctele A și B conținute într-un plan α și $C \notin \alpha$. Dacă M este mijlocul segmentului AC și N este mijlocul segmentului BC , stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:

- a) $M \in \alpha$; b) $M \notin \alpha$; c) $AC \subset \alpha$;
d) $AB \subset \alpha$; e) $MB \subset \alpha$; f) $MN \subset \alpha$.

- 4 Într-un plan α se consideră punctele A, B, C și D despre care se știe că A, B, C sunt coliniare și $D \notin AB$. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\alpha = (ABD)$;
b) Există un plan unic care conține punctele A, B și C .
c) $\alpha = (ADC)$;
d) $(ADB) = (BCD)$;
e) $B \in (ADC)$.

- 5 Se consideră A, B, C și D patru puncte necoplanare.
a) Este posibil ca printre cele patru puncte să existe trei coliniare? Justifică răspunsul!
b) Unind punctele două câte două în toate modurile posibile, câte drepte se obțin?

- 6 Se consideră A, B, C și D patru puncte necoplanare. Câte plane obținem, dacă considerăm toate planele ce trec prin câte trei din cele patru puncte?

- 7 Se consideră dreptele a, b, c care se intersectează în punctele A, B, C ca în figura 19. Stabilește valoarea

de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

- a) $(b, a) = (a, c)$;
b) $(b, c) \neq (b, B)$;
c) $(ABC) = (a, c)$;
d) $(ABC) = (AB, C)$;
e) $(ABC) = (AB, AC)$;
f) există planul (b, A) .

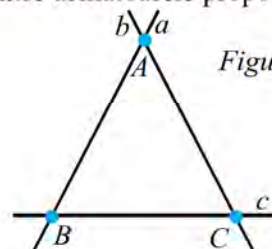


Figura 19

- 8 În desenul din figura 20, DE este linie mijlocie în triunghiul ABC . Precizează valorile de adevăr ale propozițiilor:

- a) $(ADE) = (ABC)$;
b) $DE \subset (ABC)$;
c) $BC \subset (ADE)$;
d) $(ABE) = (BC, DE)$.

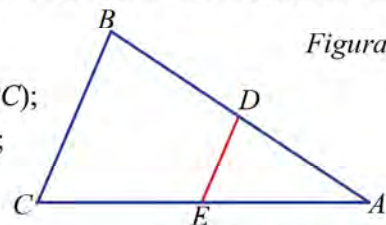


Figura 20

- 9 Se consideră dreptele paralele d și g . Dacă $A \in d, B \in d, D \in g, C \in g, M \in AD, N \in BC$, arată că $MN \subset (d, g)$.

- 10 Se consideră punctele necoliniare A, B și C . Dacă $M \in AB$ și $N \in BC$, precizează valorile de adevăr ale următoarelor propoziții: a) $(ABC) = (BAC)$;
b) $M \in (ABC)$; c) $N \in (ABC)$;
d) $MN \subset (ABC)$; e) $(ABC) \neq (MNA)$.

- 11 Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D . Completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

- a) $(ABC) \cap (ABD) = \dots$; b) $(ABC) \cap (ACD) = \dots$;
c) $(ABC) \cap (BCD) = \dots$; d) $AB \subset \dots$ și $AB \subset \dots$

- 12 Într-un plan sunt date trei puncte A, B, C și în afara lui un punct D . Unind punctele două câte două în toate modurile posibile, care este numărul maxim de drepte distincte care se poate obține? Dar numărul minim?

- 13 Triunghiul ABC are laturile AB și AC incluse în planul α . Ce relație este între planul α și planul (AB, AC) ?



LECTIA 3

Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat

Reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Figura 21 reprezintă o fotografie a piramidei lui Keops, (Marea Piramidă din Gizeh) una dintre cele șapte minuni ale lumii, construită în jurul anului 2560 î.Hr. Această construcție este cea mai veche minune a lumii și totuși singura care a supraviețuit timpului. A fost cea mai înaltă construcție din lume mai bine de 43 de secole până în 1889 când a fost construit Turnul Eiffel.



Figura 21



Definirea piramidei

Pentru a descoperi noțiunea geometrică de piramidă, reamintim mai întâi noțiunea de suprafață poligonală. Pentru un poligon dat, numim suprafață poligonală reuniunea dintre poligon și interiorul său.

Mulțimile colorate din figura 22 sunt suprafețe poligonale.

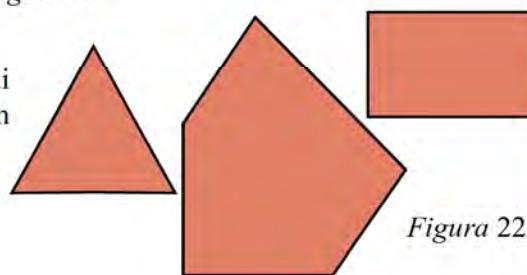


Figura 22

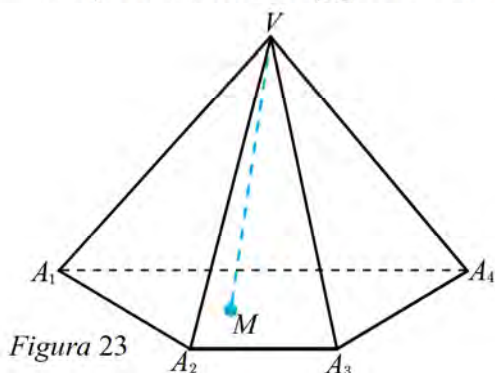


Figura 23

În figura 23 este reprezentată o piramidă având baza un patrulater oarecare. Dacă $A_1A_2A_3A_4$ este un patrulater inclus într-un plan α , iar V este un punct care nu aparține planului α , piramida $VA_1A_2A_3A_4$ este corpul solid mărginit de suprafața poligonală $A_1A_2A_3A_4$ și de suprafețele triunghiulare VA_1A_2 , VA_2A_3 , VA_3A_4 și VA_4A_1 .

Cu alte cuvinte, piramida $VA_1A_2A_3A_4$ este mulțimea obținută reunind toate segmentele de forma VM , unde M descrie suprafața poligonală $A_1A_2A_3A_4$.



Elemente caracteristice piramidei

Elementele piramidei $VA_1A_2A_3A_4$ sunt următoarele:

- Baza piramidei: suprafața poligonală $A_1A_2A_3A_4$.
- Vârful piramidei: punctul V .
- Muchiile piramidei:
 - muchii bazei sunt segmentele: A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 și A_4A_1 ;
 - muchii laterale sunt segmentele: VA_1 , VA_2 , VA_3 și VA_4 .
- Fețele laterale ale piramidei sunt suprafețele triunghiulare: VA_1A_2 , VA_2A_3 , VA_3A_4 și VA_4A_1 .

Observație

Prin vârfurile piramidei $VA_1A_2A_3A_4$ înțelegem atât vârful V , cât și vârfurile bazei, iar prin fețele piramidei înțelegem atât baza, cât și fețele laterale.

Analog se poate trata cazul general al piramidei $VA_1A_2\dots A_n$, având ca bază un poligon cu n laturi, unde n este orice număr natural, $n \geq 3$. Această piramidă are: $2n$ muchii (n muchii laterale și n muchii ale bazei), $n + 1$ fețe (n fețe laterale la care se adaugă baza) și $n + 1$ vârfuri (n vârfuri ale poligonului bazei la care se adaugă vârful V).





Clasificarea piramidelor după forma bazei

Piramidele se pot clasifica în funcție de numărul laturilor poligonului ce formează baza. Astfel, avem piramide triunghiulare, patrulater, pentagonale, hexagonale etc.

Modelul matematic al piramidei lui *Keops* este corpul geometric reprezentat în *figura 24*, numit piramidă patrulateră.

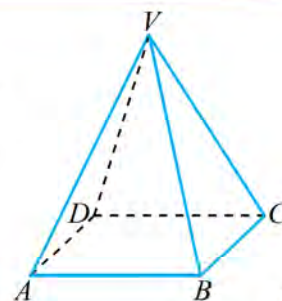


Figura 24



Piramida regulată

Definiție

O piramidă se numește piramidă regulată dacă baza este un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt congruente.

Exemple

1. Piramidele egiptene sunt piramide patrulater regulate.
2. Piramida care are ca bază un triunghi echilateral, iar muchiile laterale sunt congruente este o piramidă triunghiulară regulată.



Tetraedrul regulat

Definiții

- O piramidă triunghiulară se numește *tetraedru*.
- Un tetraedru ale cărui fețe sunt toate triunghiuri echilaterale se numește *tetraedru regulat*.

Tetraedrul $ABCD$ are patru fețe triunghiulare, ABC , DAB , DBC și DAC , patru vârfuri și 6 muchii (vezi *figura 25*).

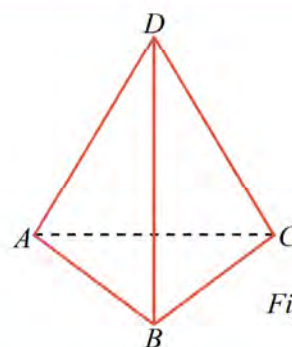


Figura 25

Observații

1. Oricare patru puncte necoplanare determină un tetraedru, având vârfurile în punctele date.
2. Cuvântul tetraedru este de origine greacă și înseamnă poliedru cu 4 fețe. Prin poliedru, înțelegem un corp solid mărginit de suprafețe poligonale. Piramida și paralelipipedul sunt exemple de poliedre.
3. Într-un tetraedru $ABCD$ oricare dintre punctele A , B , C sau D poate fi considerat vârf.



Desfășurarea piramidei

Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată. Ne imaginăm suprafața piramidei alcătuită din carton. Dacă tăiem cartonul de-a lungul muchiilor laterale, îndoim și rotim fețele laterale până când ajung în același plan, obținem desfășurarea din figura 26.

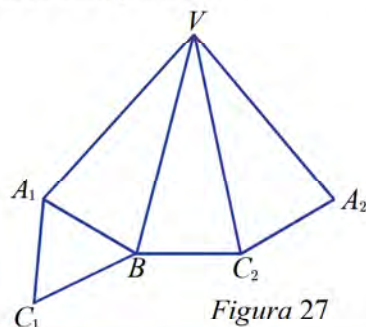


Figura 27

De exemplu, dacă tăiem de-a lungul muchiilor VA , AC și BC , obținem desfășurarea din figura 27. Invers, pornind de la o desfășurare, putem reconstitui piramida.

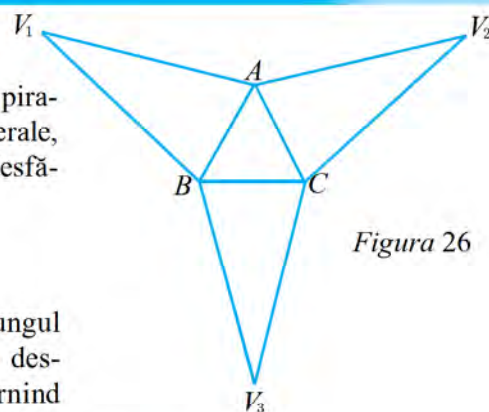


Figura 26



Desfășurarea piramidei regulate

Figurile 28, 29 și 30 reprezintă desfășurările suprafețelor unei piramide triunghiulare regulate, ale unei piramide patrulaterale regulate și ale unei piramide hexagonale regulate, având lungimea muchiei bazei l și lungimea muchiei laterale m .

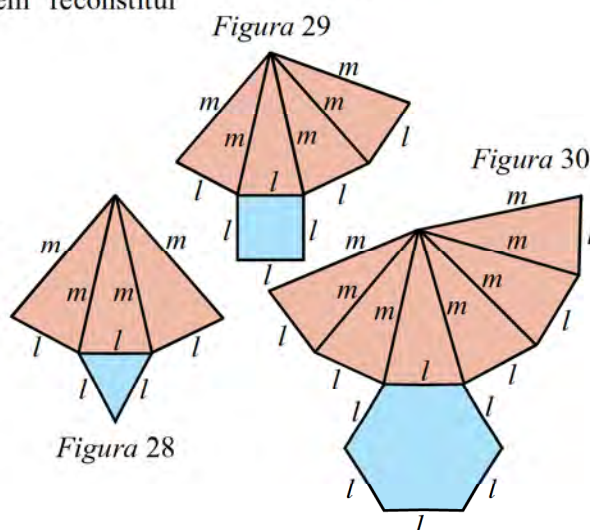


Figura 28

Figura 30



Probleme rezolvate

- 1 Demonstrează că, dacă $ABCD A' B' C' D'$ este un cub, atunci $ACB' D'$ este un tetraedru regulat.

Soluție Punctele A, B', C și D' sunt necoplanare, deci sunt vârfurile unui tetraedru. Notăm cu a lungimea laturii cubului.

Atunci $AC = AB' = B'C = AD' = CD' = B'D' = a\sqrt{2}$, ca diagonale în fețele cubului, deci tetraedrul este regulat (vezi figura 31).

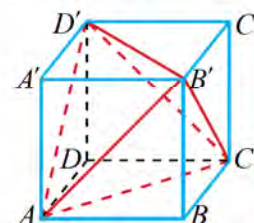


Figura 31

- 2 Demonstrează că muchia laterală a unei piramide hexagonale regulate este mai mare decât muchia bazei.

Soluție Notăm baza piramidei cu $ABCDEF$ și vârful cu V (vezi figura 32).

Fie $AB = a$ și $VA = b$. Hexagonul regulat $ABCDEF$ poate fi înscris într-un cerc de diametru AD . Cum raza cercului circumscris hexagonului regulat este congruentă cu latura acestuia, deducem că $AD = 2a$.

În triunghiul VAD , avem $AD < VA + VD$, adică $2a < b + b$, de unde $a < b$.

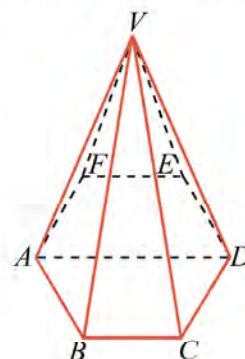


Figura 32





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Numește corpurile geometrice din figura 33:

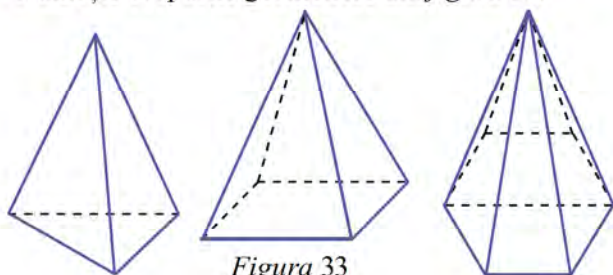


Figura 33

- 2 Completează tabelul:

Piramida	Numărul de			V + F	M + V
	fețe (F)	vârfuri (V)	muchii (M)		
Triunghiulară					
Patrulateră					
Pentagonală					
Hexagonală					

Ce concluzie poți formula, analizând ultimele două coloane ale tabelului?

- 3 Îndoie un triunghi ascuțitunghic după liniile mijlocii până când cele trei vârfuri coincid.
Ce corp geometric obții?
- 4 Confeționează din carton o piramidă triunghiulară cu toate muchiile egale cu 10 cm. Calculează aria suprafeței de carton necesară.
- 5 Care este numărul maxim de triunghiuri echilaterale pe care îl putem obține din 6 chibrituri, fără a tăia niciun chibrit?
- 6 Precizează valoarea de adevăr a propozițiilor:
 p : „Orice tetraedru regulat este o piramidă triunghiulară regulată”;
 q : „Orice piramidă triunghiulară regulată este un tetraedru regulat”. Justifică răspunsul!

- 7 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat. Notăm cu M mijlocul muchiei AB și cu N mijlocul muchiei CD .

- a) Demonstrează că triunghiurile ABN și CDM sunt isoscele.
 b) Determină intersecția planelor (ABN) și (CDM) .

- 8 a) Cum se numește piramida care are 4 vârfuri?
 b) Cum se numește piramida care are 7 vârfuri?
 c) Cum se numește piramida care are 8 muchii?
 d) Cum se numește piramida cu 6 muchii congruente?

- 9 Figura 34 reprezintă desfășurarea pe un plan a unei piramide patrulateră cu baza un pătrat și având toate muchiile egale cu 10 cm.

- a) Calculează VV' .
 b) Confeționează din carton figura 34 și apoi, prin lipire, o piramidă patrulateră.
 c) Poți obține și o altă desfășurare pe plan a piramidei confeționate?

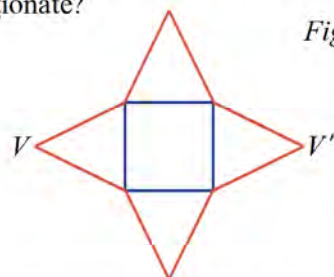


Figura 34

- 10 O piramidă patrulateră regulată are baza $ABCD$ și vârful S . Dintre muchiile piramidei, indică:

- a) o pereche de muchii concurente;
 b) o pereche de muchii paralele;
 c) o pereche de muchii necoplanare.

- 11 Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară. Notăm cu N , M , P , respectiv mijloacele muchiilor BC , CA și AB ale bazei. Demonstrează că planele (SAM) , (SBN) și (SCP) au o dreaptă comună.

- 12 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie 6 cm.
 a) Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului.
 b) Calculează suma ariilor fețelor tetraedrului.





Investigație



Temă

Recomandată pentru lucru în echipe

- Pe o masă rotundă este așezată o față de masă pătrată, astfel încât centrul de simetrie al pătratului coincide cu centrul cercului. Diametrul mesei este de 80 cm, latura feței de masă este de 1,20 m, iar înălțimea mesei este de 75 cm. La ce înălțime față de podea se vor afla colțurile feței de masă?
Investighează care este dimensiunea maximă a laturii feței de masă pătrată, exprimată printr-un număr natural de centimetri, astfel încât colțurile feței de masă să nu atingă podeaua.
- Se consideră în spațiu șase puncte A, B, C, D, E, F , astfel încât oricare patru dintre ele sunt necoplanare. Află probabilitatea potrivit căreia, dacă luăm la întâmplare un plan determinat de trei dintre cele șase puncte, acesta să nu conțină punctul A .
- Se consideră o piramidă triunghiulară regulată $SBAC$ de vârf S , $\angle ASB = 40^\circ$ și $SA = 20$ cm. O furnică pleacă din punctul A și se deplasează pe suprafața laterală a piramidei, revenind în punctul A după ce a trecut printr-un punct situat pe muchia SB și printr-un punct situat pe muchia SC . Calculează lungimea minimă a drumului parcurs de furnică.
- Se consideră $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$ și cu toate muchiile egale cu $2a$, $a > 0$.

Punctele E și F sunt mijloacele muchiilor AD , respectiv BC .

- Calculează suma ariilor fețelor piramidei $SABCD$.
- Calculează aria triunghiului SEF .

- Andrei merge într-o tabără de alpinism. El escaladează o stâncă care are forma unei piramide patrulaterale regulate $VMNPQ$ cu vârful V , având toate muchiile de lungime 12 m. Știind că pleacă din punctul M și ajunge în punctul R , mijlocul muchiei VP , deplasându-se în linie dreaptă pe fețele (VMN) , (VNP) , și că a parcurs drumul de lungime minimă între cele două puncte, investighează dacă drumul parcurs de Andrei este mai mare de 15 m (vezi figura 35).

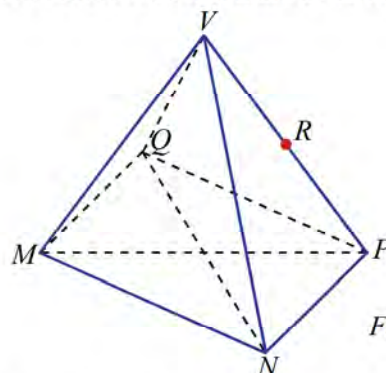


Figura 35

- Investighează dacă există piramide hexagonale regulate cu muchia bazei egală cu muchia laterală.

PROIECT

Informații uluitoare despre

Marea piramidă a lui Keops



PLANUL PROIECTULUI

MATERIALE NECESARE:

- Calculator, tabletă, articole internet.
- Coli de hârtie A4.

REALIZAREA PROIECTULUI:

- Împărțiți clasa în trei echipe de elevi.
- Membrii fiecărei echipe vor realiza pe coli A4 sarcinile de lucru primite.



SARCINI DE LUCRU:

- Realizează o prezentare generală a Piramidei lui Keops.
- Prezintă punctul de vedere al lui Herodot referitor la construirea piramidei.
- Explorează curiozitățile matematice și astronomice legate de Piramida lui Keops.

LECȚIA 4

Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul; Reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări



Descrierea prisme; elementele prisme; clasificare

În figura 36 sunt două cutii de bomboane. Prima are ca baze (baza superioară și cea inferioară) două pătrate. A doua cutie are ca baze două hexagoane regulate.

Fețele laterale ale cutiilor sunt dreptunghiuri.

Corpurile geometrice din figura 36 vor fi numite *prisme*.



Figura 36

Definiție

Prisma este un poliedru mărginit de două baze care sunt poligoane congruente nesituate în același plan și de fețele laterale care sunt paralelograme.

- În figura 37 este reprezentată o prismă $ABCA'B'C'$. Elementele acestei prisme sunt:

- ✓ bazele: triunghiurile ABC și $A'B'C'$;
- ✓ fețele laterale: paralelogramele $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $ACC'A'$;
- ✓ vârfurile: A, B, C, A', B', C' ;
- ✓ muchiile laterale: AA' , BB' , CC' .

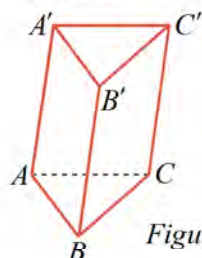


Figura 37

- În figura 38 este reprezentată o prismă patrulateră $ABCD A'B'C'D'$. Elementele acestei prisme sunt:

- ✓ bazele: patrulateralele $ABCD$ și $A'B'C'D'$;
- ✓ fețele laterale: paralelogramele $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$;
- ✓ vârfurile: $A, B, C, D, A', B', C', D'$;
- ✓ muchiile laterale: AA' , BB' , CC' , DD' .

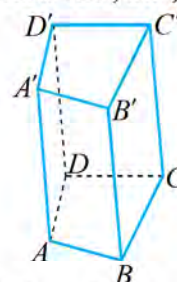


Figura 38

În cele ce urmează, ne vom concentra atenția asupra prismelor care au fețele laterale dreptunghiulare, deoarece majoritatea prismelor întâlnite în realitatea înconjurătoare se încadrează în această categorie.

Definiții

- Se numește *prismă dreaptă*, o prismă ale cărei fețe laterale sunt dreptunghiuri.
- Prismele care nu sunt drepte se numesc *prisme oblice*.
- Prismele drepte care au ca baze poligoane regulate se numesc *prisme regulate*.

Exemplu

Prismele din imaginea 36 sunt drepte, iar prismele din figurile 37 și 38 sunt oblice. Prismele din imaginea 36 sunt prisme regulate și anume: o prismă patrulateră regulată și o prismă hexagonală regulată.





Paralelipipedul dreptunghic

Definiție

Se numește *paralelipiped dreptunghic*, o prismă dreaptă cu bazele dreptunghiuri.

Paralelipipedul dreptunghic are șase fețe dreptunghiulare, 8 vârfuri și 12 muchii.

Numeroase obiecte din realitatea înconjurătoare au forma unor paralelipede dreptunghice. De exemplu: dulapul, cutia de chibrituri, sala de clasă. Lungimile a trei muchii concurente ale unui paralelipiped dreptunghic se numesc *dimensiunile paralelipedului dreptunghic*.

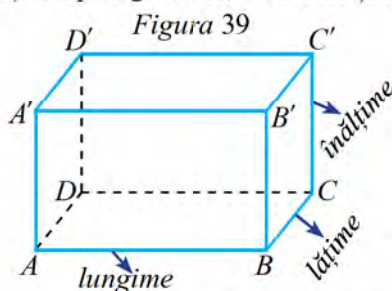


Figura 40



Aceste dimensiuni poartă numele de lungime, lățime și înălțime (vezi figura 39 și figura 40).

Observație

O prismă patrulateră regulată este un paralelipiped dreptunghic care are două dimensiuni egale.



Cubul

Un caz particular al paralelipedului dreptunghic îl constituie *cubul*.

Definiție

Cubul este un paralelipiped dreptunghic cu toate dimensiunile egale.

REȚINE!

Toate cele șase fețe ale cubului sunt pătrate.

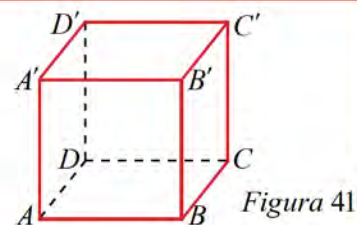


Figura 41



Desfășurarea prisme drepte

Figurile 42, 43, 44 reprezintă desfășurarea suprafeței unei prisme drepte cu baza triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat cu latura bazei l și înălțimea h . Figura 45 reprezintă desfășurarea suprafeței unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile L, l, h , iar figura 46 este desfășurarea unui cub cu muchia l .

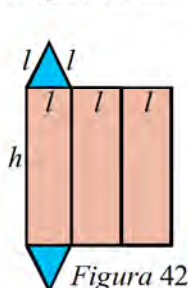


Figura 42

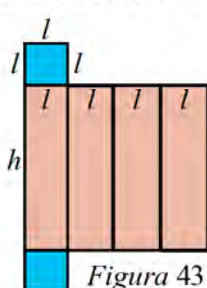


Figura 43

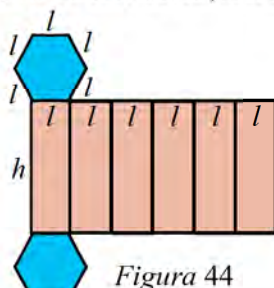


Figura 44

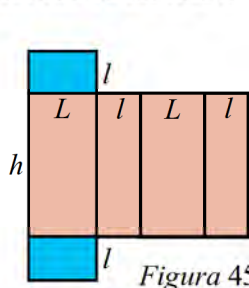


Figura 45

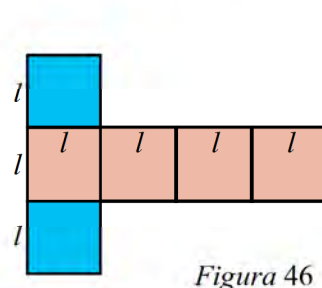
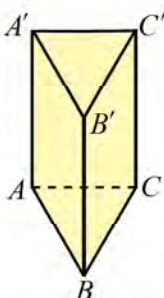
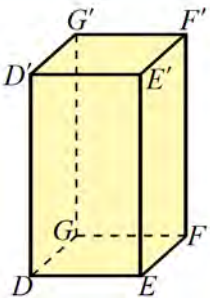
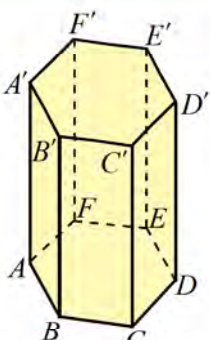
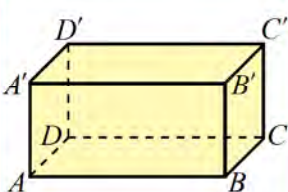
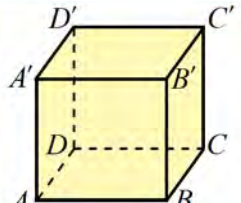


Figura 46

Tabelul următor cuprinde exemple de prisme drepte:

Corp geometric	Desen	Două baze congruente	Fetele laterale au formă de dreptunghi	Număr vârfuri	Număr muchii	Număr fețe
Prisma triunghiulară regulată		$\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ triunghiuri echilaterale congruente.	Exemplu: $ABB'A'$ este o față laterală.	6	9	5
Prisma patrulateră regulată		$DEFG$ și $D'E'F'G'$ pătrate congruente.	Exemplu: $DEE'D'$ este o față laterală.	8	12	6
Prisma hexagonală regulată		$ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$ hexagoane regulate congruente.	Exemplu: $CDD'C'$ este o față laterală.	12	18	8
Paralelipiped dreptunghic		Are toate cele 6 fețe dreptunghiuri. $ABCD$ și $A'B'C'D'$ sunt baze.	Exemplu: $BCC'B'$ este o față laterală.	8	12	6
Cubul		Are toate cele 6 fețe pătrate congruente. $ABCD$ și $A'B'C'D'$ sunt baze.	Exemplu: $DCC'D'$ este o față laterală.	8	12	6

Observație

Dacă notăm cu v numărul vârfurilor, cu m numărul muchiilor și cu f numărul fețelor, avem relația $v + f = m + 2$.



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Confeționează din carton corpuri geometrice care au următoarele desfășurări:

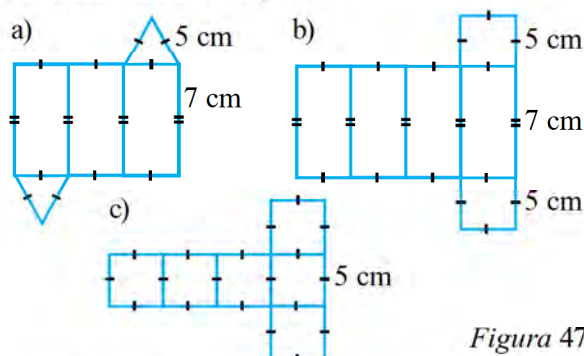


Figura 47

- 2 Care dintre desenele de mai jos reprezintă desfășurarea unui cub?

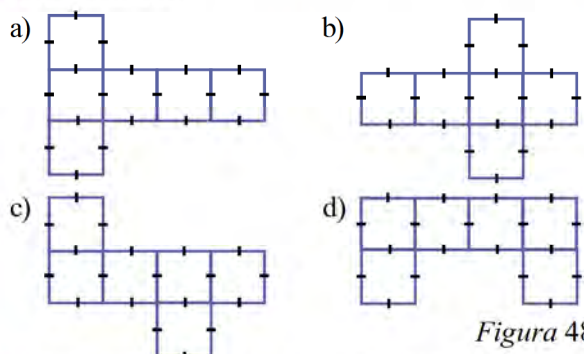


Figura 48

- 3 Care dintre desenele de mai jos reprezintă desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic?

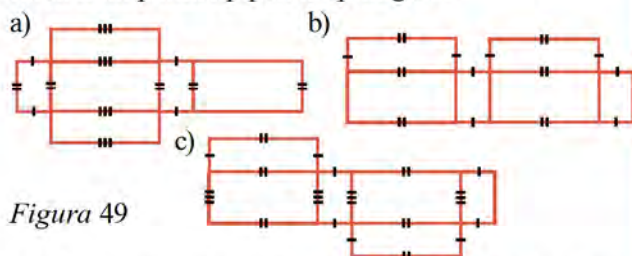


Figura 49

Confeționează din carton aceste desfășurări și apoi, prin îndoire, confeționează paralelipipedul (în cazul în care este posibil).

- 4 Desfășurarea unui cub are aria egală cu 36 cm^2 . Determină lungimea muchiei cubului.
- 5 O prismă hexagonală regulată are toate muchiile congruente, având lungimea de 8 cm. Determină aria desfășurării.

- 6 a) Confeționează din carton o prismă hexagonală regulată cu toate muchiile de 5 cm.
b) Desenează o prismă hexagonală dreaptă.
c) Desenează desfășurarea prisme confeționate la punctul a).

- 7 O prismă triunghiulară regulată are toate muchiile congruente, fiecare muchie având lungimea de 8 cm. Determină aria desfășurării prisme.

- 8 În figura 50 este reprezentată o clădire având forma unei prisme drepte.

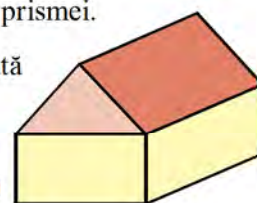


Figura 50

Desenează prisma, notează vârfurile sale și precizează elementele.

- 9 Precizează cum se numește o prismă care are:
a) 6 vârfuri; b) 10 vârfuri; c) 8 fețe;
d) 4 fețe laterale; e) 5 muchii laterale; f) 12 muchii.

- 10 În figura 51 este reprezentată desfășurarea unei prisme drepte $ABCA'B'C'$. Baza prisme este triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB = 12 \text{ cm}$ și $AC = 9 \text{ cm}$. Știind că $BMM'B'$ este un pătrat, calculează dimensiunile dreptunghiului $ANN'A'$. Desenează figura pe un carton și construiește prisma.

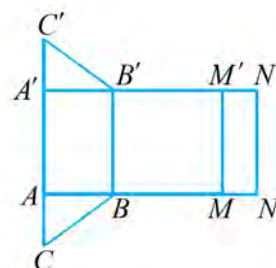


Figura 51

- 11 Se consideră prisma dreaptă $ABCDEF$, cu baza triunghiul echilateral ABC , având $AB = 4 \text{ cm}$ și $AD = 5 \text{ cm}$. O furnică pleacă din punctul A și ajunge în punctul D pe drumul cel mai scurt, traversând toate fețele laterale ale prisme.
- a) Desfășoară pe un plan prisma.
b) Trasează drumul parcurs de furnică și calculează lungimea acestuia.



LECTIA 5

Cilindrul circular drept; conul circular drept

Reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări



Descrierea cilindrului circular drept



Sky Tower, București.

Multe dintre obiectele pe care le întâlnim și le folosim frecvent în cotidian, ca de exemplu: monede, cutii, vase de uz casnic, recipiente, tuburi, chiar și clădiri etc., au forme de cilindru circular drept.



Al Bahar Tower, Abu Dhabi.

În figura 52, am reprezentat o suprafață dreptunghiulară $OO'A'A$. Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei OO' , se obține un cilindru circular drept. Spunem că cilindrul circular drept este un corp de rotație.

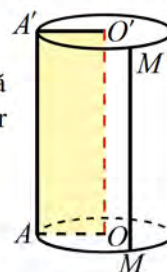


Figura 52



Definiție

Cilindrul circular drept este corpul de rotație care se obține prin rotirea completă de 360° a unui dreptunghi în jurul unei laturi sau printr-o rotație de 180° în jurul unei axe de simetrie a dreptunghiului.

Vom pune în evidență elementele sale.

- Prin rotirea suprafeței dreptunghiulare $OO'A'A$ în jurul lui OO' , segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA , iar segmentul $O'A'$ descrie discul de centru O' și rază $O'A'$. Cele două discuri constituie *bazele* cilindrului circular drept. Bazele sunt două *discuri de raze egale*.
- Dreapta OO' , determinată de centrele bazelor se numește *axa* cilindrului (*axa de rotație*).
- Segmentul AA' și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Deci, o generatoare a cilindrului circular drept este un segment MM' , unde M și M' aparțin respectiv cercurilor celor două baze, iar patrulaterul $OMM'O'$ este un dreptunghi.



Desfășurarea cilindrului circular drept

O generatoare a cilindrului circular drept, rotindu-se în jurul axei, generează suprafața laterală a cilindrului. În figura 53 este reprezentată o cutie de carton cilindrică a cărei suprafață laterală este colorată în albastru, iar bazele sunt colorate în galben.

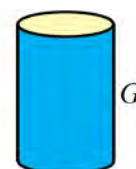


Figura 53

Decupând cercurile bazelor și tăind suprafața laterală de-a lungul unei generatoare, suprafața cutiei poate fi desfășurată pe un plan (vezi figura 54).

Desfășurarea suprafeței laterale este un dreptunghi având o dimensiune egală cu lungimea cercului bazei, iar cealaltă dimensiune egală cu generatoarea cilindrului.

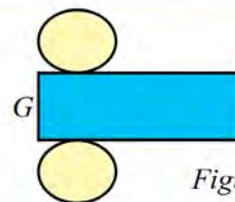


Figura 54



Descrierea conului circular drept



Elementele conului circular drept



În viața cotidiană, în natură, în tehnică întâlnim obiecte care au formă de con, cum sunt: diverse vase, recipiente (în formă de conuri cu vârful în jos), pâlnii, acoperișurile unor turnuri, vârfuri ale unor unelte, vârfurile creioanelor ascuțite cu ascuțitoarea; formele de relief numite conuri vulcanice au aproximativ formă de con.

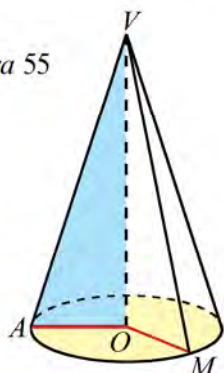


Trulli din Alberobello, Italia.

Conul circular drept este un corp de rotație. În figura 55, avem reprezentată o suprafață triunghiulară VAO cu unghiul O de 90° . Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei VO , se obține un con circular drept.



Figura 55



Vom pune în evidență elementele unui con circular drept.

- Punctul V reprezintă vârful conului.
- Prin rotirea suprafeței triunghiulare VAO în jurul catetei VO , segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA . Acest disc constituie baza conului circular drept.
- Dreapta VO reprezintă axa conului (axa de rotație).
- Segmentul VA și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de generatoare. Așadar, o generatoare a conului circular drept este un segment VM , unde M aparține cercului bazei.

Definiție

Conul circular drept este corpul de rotație care se obține prin rotirea completă de 360° a unui triunghi dreptunghic în jurul unei catete sau prin rotirea cu 180° a unui triunghi isoscel în jurul axei de simetrie.



Desfășurarea conului circular drept

Reuniunea tuturor segmentelor VM , unde V este vârful conului, iar punctul M este mobil pe cercul bazei, formează suprafața laterală a conului.

Desfășurarea pe un plan a suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector circular a cărui rază este generatoarea conului, iar lungimea arcului corespunzător sectorului este egală cu lungimea cercului bazei (vezi figura 56).

Dacă notăm cu R lungimea razei bazei conului și cu G lungimea generatoarei, atunci unghiul la centru în desfășurarea plană a conului circular drept ($\angle BVB'$ din figura 56), are măsura în grade dată de formula: $n^\circ = \frac{R}{G} \cdot 360^\circ$.

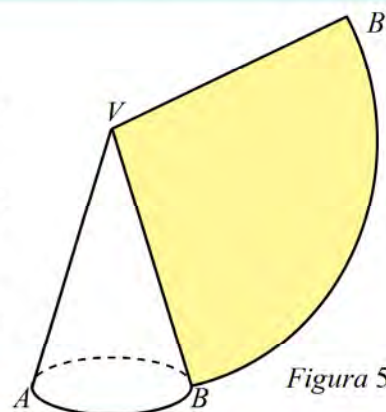


Figura 56

Temă recomandată pentru lucru în echipe

- Dintr-o bucată de carton, taie un sector circular, apoi prin îndoire și lipire, confecționează un coif reprezentând suprafața laterală a unui con circular drept.
- Confecționează dintr-o bucată dreptunghiulară de carton, prin îndoire și lipire, suprafața laterală a unui cilindru circular drept.


Problemă rezolvată

Pentru a urca de la parterul P al unui magazin la etajul E , se folosește o scară în spirală ca în figură. Dacă raza casei scărilor este de 3 m și înălțimea acesteia este de 6 m, iar distanța $EE' = 4$ m, calculează lungimea drumului PE parcurs de o persoană pe scări (vezi figura 57).

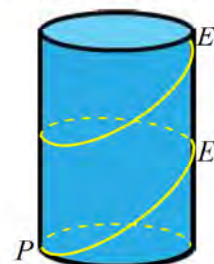


Figura 57

Soluție Desfășurând pe un plan suprafața casei scărilor, se obține un dreptunghi cu dimensiunile 6π m și 6 m. Lungimea drumului parcurs de la parter la etaj este suma lungimilor segmentelor PP_1 și P_1E . Avem $PP_1 = \sqrt{36\pi^2 + 16}$ și $P_1E = \sqrt{9\pi^2 + 4}$ deci $PP_1 + P_1E = 3\sqrt{9\pi^2 + 4}$ m. (Vezi figura 58). Folosind un calculator, găsim că lungimea drumului este de aproximativ 29 m.

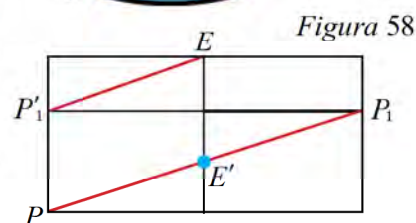


Figura 58


FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE
PROBLEME


- 1 Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 4$ cm și generatoarea $G = 10$ cm. Calculează aria desfășurării suprafeței laterale a cilindrului.
- 2 Un pahar cilindric are raza de 3 cm și generatoarea de 8 cm. O furnică pornește dintr-un punct M al bazei vasului, ocolește o dată suprafața laterală a paharului și ajunge la baza superioară a paharului într-un punct N situat pe aceeași generatoare cu punctul M . Care este lungimea celui mai scurt drum posibil de la punctul M la punctul N ?
- 3 Un cilindru circular drept are aria bazei 36π cm² și generatoarea de 8 cm. Calculează aria desfășurării laterale a cilindrului.
- 4 Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 5$ cm și aria desfășurării laterale egală cu 80π cm². Calculează lungimea generatoarei cilindrului.
- 5 Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru este un pătrat cu latura 20π cm. Calculează ce lungime are diametrul bazei cilindrului.
- 6 Dă exemple de corpuri din realitatea înconjurătoare care au formă de con.
- 7 Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc cu raza $R = 6$ cm și unghiul de 120° . Calculează aria sectorului de cerc și raza bazei conului.
- 8 Un con circular drept are generatoarea $G = 12$ cm și raza bazei $R = 9$ cm. Calculează măsura unghiului sectorului de cerc corespunzător desfășurării suprafeței laterale a conului.

LECȚIA 6

Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte



Drepte paralele

Definiție

Două drepte sunt paralele dacă sunt coplanare și nu au puncte comune.

Știm că relația de paralelism în plan are următoarele proprietăți: relația este simetrică (dacă $a \parallel b$, atunci $b \parallel a$) și este tranzitivă (dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$).

Proprietate

Două drepte distincte din spațiu, paralele cu o a treia, sunt paralele între ele.

Aplicație

Diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sunt concurente. Punctul de intersecție reprezintă mijlocul fiecărei diagonale.

Demonstrație

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic (vezi figura 59). Patrulaterul $ABB' A'$ și $A' B' C' D'$ fiind dreptunghiuri, avem $AB \parallel A' B'$ și $A' B' \parallel C' D'$, deci $AB \parallel C' D'$.

De asemenea, $AB = A' B'$ și $A' B' = C' D'$, deci $AB = C' D'$. Rezultă că $ABC' D'$ este paralelogram, prin urmare segmentele AC' și BD' se intersectează în

mijlocul fiecăruia. Fie O acest punct. Se arată analog că patrulaterul $ADC' B'$ este paralelogram, deci mijloacele diagonalelor sale coincid, adică mijlocul lui $B' D$ coincide cu mijlocul O al lui AC' , apoi că patrulaterul $BCD' A'$ este paralelogram, deci mijloacele diagonalelor sale coincid, adică mijlocul lui CA' coincide cu mijlocul O al lui BD' .

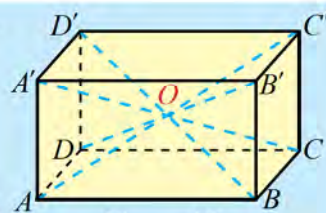


Figura 59

Observație

Din demonstrația anterioară deducem că intersecția diagonalelor este centru de simetrie al paralelipipedului dreptunghic.



Măsura unghiului a două drepte în spațiu

Cunoaștem modul în care se definește măsura unghiului format de două drepte din plan.

- Dacă dreptele sunt concurente, ele formează patru unghiuri, dintre care două ascuțite și două obtuze, sau toate patru drepte. Măsura unghiului celor două drepte este măsura unuia dintre unghiurile ascuțite (sau drepte).
- Dacă dreptele sunt paralele sau coincid, măsura unghiului lor este egală cu 0° .



Rămâne să definim măsura unghiului a două drepte necoplanare.

În figura 60 este reprezentată o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$. Deoarece fețele laterale $ABB'A'$ și $ACC'A'$ sunt paralelograme, avem $AB \parallel A'B'$ și $AC \parallel A'C'$.

Deci, unghiurile $\angle BAC$ și $\angle B'A'C'$ sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele.

Din faptul că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente (conform cazului L.L.L.), rezultă $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Fie $A'B''$ semidreapta opusă semidreptei $A'B'$.

Unghiurile $\angle BAC$ și $\angle B'A'C'$ au, de asemenea, laturile respectiv paralele. Din faptul că $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, iar $\angle B'A'C'$ și $\angle B''A'C'$ sunt suplementare, deducem că unghiurile $\angle BAC$ și $\angle B''A'C'$ sunt suplementare.

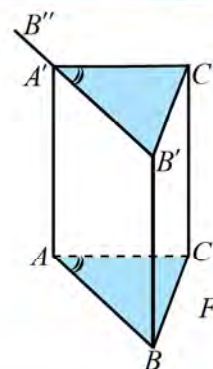


Figura 60

Teoremă

Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

Mai precis, două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt:

- congruente, dacă sunt amândouă ascuțite sau amândouă obtuze sau dacă unul dintre ele este drept;
- suplementare, dacă unul este ascuțit și celălalt este obtuz.

Dacă a și b sunt două drepte necoplanare, le asociem două drepte concurente, în felul următor:

Algoritmul construcției unghiului a două drepte necoplanare

- Printr-un punct oarecare O , ducem dreptele $a' \parallel a$ și $b' \parallel b$.
- Prin definiție, măsura unghiului format de dreptele a și b este măsura unghiului dreptelor a' și b' .
- Scriem $\widehat{a, b} = \widehat{a', b'}$ sau $\widehat{a, b} \equiv \widehat{a', b'}$ (vezi figura 61 a)).

Altfel, dacă alegem pe dreapta a un punct A prin care ducem dreapta $b'' \parallel b$, avem $\angle(a, b) \equiv \angle(a, b'')$ (vezi figura 61 b), c)).

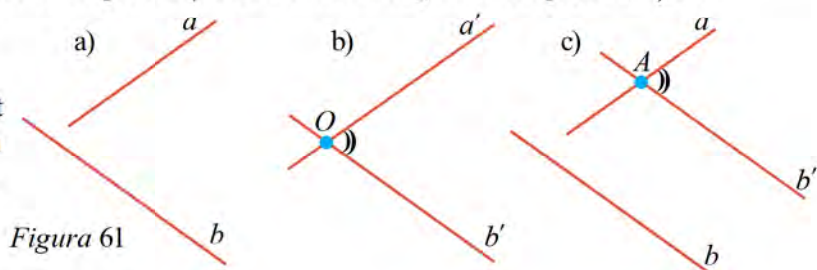


Figura 61

Observații

1. Din algoritmul construcției unghiului a două drepte necoplanare deducem că acesta poate lua valori de la 0° până la 90° .
2. Din teorema cu privire la unghiurile cu laturile respectiv paralele, rezultă că măsura unghiului dreptelor a' și b' nu depinde de poziția punctului O .
3. În probleme, pentru a pune în evidență unghiul a două drepte necoplanare a și b , este convenabil ca printr-un punct al unei drepte să ducem o paralelă la cealaltă dreaptă.

De exemplu, dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă având ca bază un triunghi echilateral, măsura unghiului dreptelor AB și $A'C'$ este măsura unghiului ascuțit format de dreapta AB cu paralela dusă prin punctul A la dreapta $A'C'$, adică $\angle BAC = 60^\circ$ (vezi figura 62).

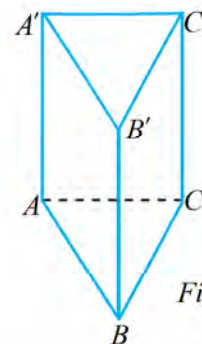


Figura 62



Problemă rezolvată

Se consideră un tetraedru regulat $ABCD$, M și N sunt mijloacele muchiilor AB , respectiv AC , iar P și Q sunt mijloacele muchiilor CD , respectiv BD .

i) Identifică unghiurile dreptelor:

a) MN și CD ; b) BN și CD ; c) PM și NQ ; d) AD și BC .

ii) Demonstrează că $MNPQ$ este un pătrat și că $AD \perp BC$.

Soluție i) a) Prin C este dusă paralela BC la MN . (Segmentul MN este linie mijlocie în triunghiul ABC). Rezultă că $\angle(MN, CD) \equiv \angle(BC, CD)$.

b) Se consideră S , mijlocul lui AD . Avem $NS \parallel CD$, deci $\angle(BN, CD) = \angle(BN, NS)$.

c) Patrulaterul $MNPQ$ este romb. Într-adevăr, $MN \parallel BC$ și $PQ \parallel BC$. De asemenea, $MN = PQ = \frac{1}{2}BC$ (sunt linii mijlocii). Cum $MQ = \frac{1}{2}AD$ și deoarece tetraedrul este regulat, obținem $MQ = MN$. Prin urmare $MP \perp NQ$, deci $\angle(MP, NQ) = \angle(MON)$, unde $MP \cap NQ = \{O\}$.

d) $MQ \parallel AD$ și $MN \parallel BC$, deci $\angle(BC, AD) \equiv \angle(QMN)$.

ii) Am demonstrat că $MNPQ$ este romb; arătăm că este de fapt pătrat. Într-adevăr, triunghiurile PAB și NBD sunt congruente (L.L.L.) Segmentele PM și NQ sunt mediane în aceste triunghiuri congruente, prin urmare vom avea $PM = NQ$. Rombul $MNPQ$ având diagonalele congruente, este pătrat. Din $MN \perp MQ$ rezultă $AD \perp BC$.

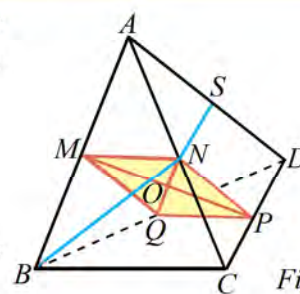


Figura 63



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Determină măsura unghiului dintre drepte:
 - AA' și DC ;
 - AA' și BC' ;
 - AA' și $B'C'$;
 - $A'B$ și DC' ;
 - BC' și AC ;
 - $A'B$ și AC .
- Piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful în V , are toate muchiile congruente. Determină măsura unghiului dintre drepte:
 - VA și DC ;
 - VA și VC ;
 - VA și AC ;
 - VC și DB .
- În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, $AA' = DC = 6\sqrt{3}$ cm și $BC = 6$ cm. Determină:
 - măsura unghiului format de drepte BC' și AD ;
 - măsura unghiului format de drepte DD' și $A'B$;
 - măsura unghiului format de drepte AC și $A'B'$.
- Piramida $VABC$ este triunghiulară regulată cu baza ABC , iar M și N sunt mijloacele muchiilor AB respectiv BC . Dacă $AB = 6$ cm și $VA = 3\sqrt{2}$ cm, determină măsura unghiului dintre drepte:
 - VA și VC ;
 - AC și MN ;
 - MN și VC ;
 - VM și AC .
- Prisma triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$ are latura bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Determină măsura unghiului dintre:
 - AC și $B'C'$;
 - AC și BB' ;
 - $A'B'$ și CC' ;
 - $A'B'$ și AC ;
 - BC și $A'B'$.
- Prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ are baza $ABCD$ un pătrat cu latura egală cu 8 cm și muchia laterală egală cu $8\sqrt{2}$ cm. Determină măsura unghiului format de drepte:
 - AC și $B'C'$;
 - $A'C$ și AD ;
 - AC și $D'B'$.
- Prisma dreaptă $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ are ca bază un hexagon regulat cu latura AB de 10 cm și muchia laterală AA' cu lungimea egală cu $10\sqrt{3}$ cm. Determină măsura unghiului format de drepte:
 - BC' și FE ;
 - CC' și $A'F'$;
 - AB și $A'F'$;
 - AB și $B'F'$;
 - AB și $B'D'$;
 - FC și $B'E'$.



LECȚIA 7

Dreaptă paralelă cu un plan

Definiție

O dreaptă este *paralelă cu un plan* dacă nu are puncte comune cu planul. În acest caz putem spune și că planul este paralel cu dreapta.

Planul α și dreapta d din figura 64 a) îndeplinesc condiția $d \cap \alpha = \emptyset$, deci putem scrie $d \parallel \alpha$ sau $\alpha \parallel d$. Dacă dreapta d nu este paralelă cu planul α , atunci avem următoarele poziții:

- Dreapta și planul au un singur punct comun. Spunem că dreapta și planul sunt secante sau că dreapta „întăpă” planul. În figura 64 b), $d \cap \alpha = \{A\}$.
- Dacă două puncte ale dreptei aparțin unui plan, atunci dreapta este inclusă în plan. În figura 64 c), avem $A, B \in \alpha$, deci $AB \subset \alpha$.

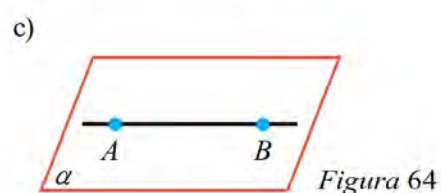
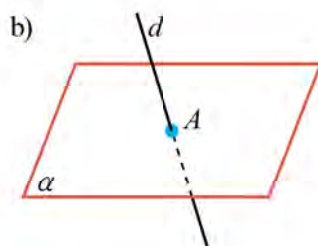
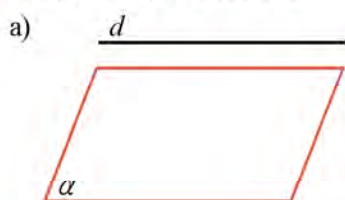


Figura 64



Teoreme de paralelism

Așezăm un caiet (notat cu $ABCD$ în figura 65), astfel încât latura CD să fie inclusă în planul mesei (notat cu α).

La întrebarea: „Care este poziția dreptei AB față de planul α ?”, răspunsul nu este greu de intuit.

Exemplul precedent ne conduce să formulăm o teoremă utilă pentru demonstrarea paralelismului dintre o dreaptă și un plan.

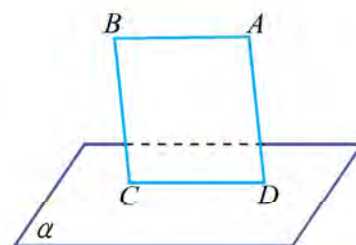


Figura 65

Teorema 1

Dacă o dreaptă d , nesituată într-un plan α , este paralelă cu o dreaptă b , inclusă în planul α , atunci dreapta d este paralelă cu planul α .

Ipoteză	Concluzie
$d \parallel b$ $b \subset \alpha$ $d \not\subset \alpha$	$d \parallel \alpha$

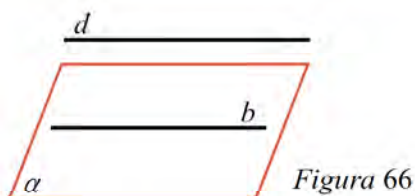


Figura 66

Demonstrație

Dreptele paralele d și b determină un plan β . Presupunem că $d \cap \alpha \neq \emptyset$ și fie $d \cap \alpha = \{B\}$. Cum $B \in d$ și $d \subset \beta$, rezultă $B \in \beta$. Punctul B aparține planelor α și β , deci aparține intersecției acestora, adică dreptei b . Am obținut că dreptele d și b au un punct comun B , ceea ce contrazice ipoteza. Presupunerea că $d \cap \alpha \neq \emptyset$ este falsă, deci $d \parallel \alpha$ (vezi figura 66).

Observații

1. Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α , atunci există în α o dreaptă g , astfel încât $d \parallel g$.
2. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, nu rezultă că dreapta este paralelă cu orice dreaptă din plan, după cum se poate observa din figura 67 $a \parallel \alpha$, $b \subset \alpha$, dar $a \nparallel b$ (dreptele a și b sunt necoplanare).

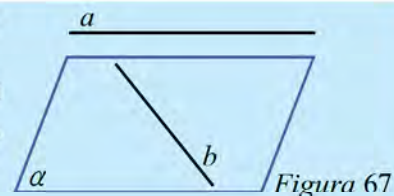


Figura 67



Problemă rezolvată

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic (vezi figura 68). Demonstrează că dreapta $A' C'$ este paralelă cu planul (ABC) .

Soluție Din $AA' \parallel BB'$ și $BB' \parallel CC'$, rezultă că $AA' \parallel CC'$, (1).

Din $AA' = BB'$ și $BB' = CC'$, rezultă că $AA' = CC'$, (2). Din (1) și (2) obținem că $ACC' A'$ este paralelogram, prin urmare $A' C' \parallel AC$. Deoarece $AC \subset (ABC)$ și $A' C' \not\subset (ABC)$, rezultă $A' C' \parallel (ABC)$.

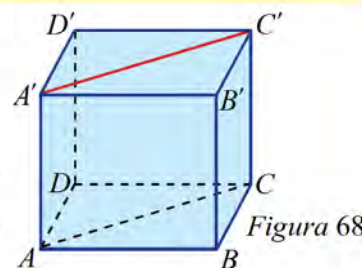


Figura 68

Teorema 2

Dacă printr-o dreaptă paralelă cu un plan ducem un plan care intersectează planul dat, atunci dreapta de intersecție este paralelă cu dreapta dată.

Ipoteză	Concluzie
$d \parallel \alpha$ $d \subset \beta$ $\alpha \cap \beta = b$	$b \parallel d$

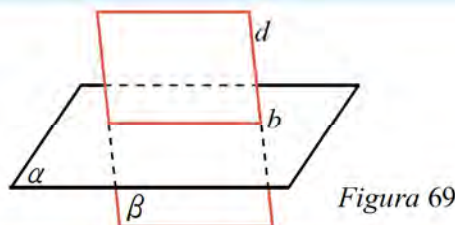


Figura 69

Demonstrație

Presupunem că dreptele d și b nu sunt paralele. Fiind coplanare, ele au un punct comun B , punct care aparține atât dreptei d , cât și planului α , ceea ce contrazice ipoteza. Presupunerea că dreptele d și b nu sunt paralele este falsă, deci $b \parallel d$ (vezi figura 69).

Observație

Planul β din teorema 2 poate fi determinat de d și de un punct oarecare $P \in \alpha$. Aplicând teorema 2, obținem că dreapta de intersecție a planului β cu planul α trece prin P și este paralelă cu d . Pe de altă parte, prin P putem construi la d o singură paralelă. Astfel putem formula o teoremă echivalentă cu teorema 2, utilă în aplicații (vezi figura 69).

Teorema 3

Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan și printr-un punct al planului ducem o paralelă la dreapta dată, această paralelă este conținută în planul dat.



Problemă rezolvată

Fie $ABCD$ un tetraedru și punctele M, N, P situate respectiv pe muchiile AB, AC și AD , astfel încât $MN \parallel BC$ și $NP \parallel CD$ (vezi figura 70).

a) Demonstrează că $MP \parallel (BCD)$.

b) Determină intersecția planelor (MPC) și (BCD) .

Soluție a) Conform teoremei lui *Thales*, din $MN \parallel BC$ rezultă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, iar din $NP \parallel CD$ rezultă $\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PD}$. Deducem că $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PD}$, de unde conform reciprocei teoremei lui *Thales*, rezultă $MP \parallel BD$ și $BD \subset (BCD)$, deci $MP \parallel (BCD)$.

b) Cum planul (MPC) conține dreapta MP paralelă cu planul (BCD) și cele două plane au în comun punctul C , rezultă că intersecția lor este dreapta a care trece prin C și este paralelă cu MP , deci și cu BD .

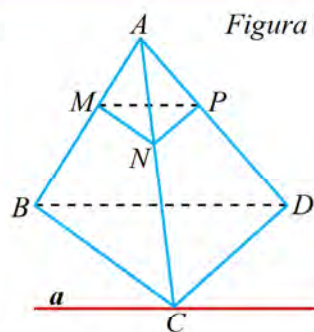


Figura 70



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- Dacă $ABCD A' B' C' D'$ este un cub, precizează poziția relativă a următoarelor perechi de drepte:
 - BB' și DD' ;
 - AC' și DD' ;
 - AC și $A' C'$;
 - BC și $A' D'$;
 - AC și $D' B'$;
 - BC' și AD' ;
 - AB și AD ;
 - AC și DB .
- $VABC$ este un tetraedru.
 - Găsește toate muchiile care sunt concurente cu VA .
 - Găsește toate perechile de muchii necoplanare.
- Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABC A' B' C'$, M este mijlocul muchiei AB și N este mijlocul muchiei AC . Precizează poziția relativă a următoarelor perechi de drepte:
 - AA' și $B' C'$;
 - AA' și CC' ;
 - AA' și MN ;
 - CC' și AB ;
 - CC' și MN ;
 - CC' și AC ;
 - $B' C'$ și MN .
- Se consideră tetraedrul $ABCD$. Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor AB, BC, CD , respectiv AD , arată că M, N, P, Q sunt puncte coplanare.
- Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ o prismă patrulateră regulată cu baza pătratul $ABCD$. Stabilește:
 - pozițiile dreptei AB față de planele (DCD') , (DCA) , $(DD' A')$, $(DD' B)$, $(A' B' A)$;
 - pozițiile dreptei AC față de planele: (ADB) , (DBD') , $(BB' C)$, (DCD') , (DBB') , $(A' B' D')$.
- $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată de vârf V , O este centrul bazei, iar M este mijlocul muchiei VA . Arată că:
 - $MO \parallel (VDC)$;
 - $MO \parallel (VBC)$;
 - $VC \parallel (MBD)$.
- Triunghiul ABC are latura BC conținută într-un plan α , iar punctul A nu aparține planului. Dacă M și N sunt puncte pe laturile AB , respectiv AC , astfel încât:
 - $AM = 2$ cm, $MB = 4$ cm, $AN = 3$ cm, $NC = 6$ cm, arată că $MN \parallel \alpha$;
 - $AM = 2$ cm, $MB = 4$ cm, $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$, arată că MN intersectează planul α .
- Se consideră paralelogramul $ABCD$ de centru O și M un punct exterior planului paralelogramului. Dacă N este mijlocul lui MA , arată că:
 - $MC \parallel (NBD)$;
 - $NO \parallel (BMC)$;
 - $NO \nparallel (BMD)$.
- În triunghiul ABC , $\angle A = 90^\circ$, $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm. Fie punctul M pe segmentul AB , astfel încât $BM = 6$ cm și punctul N pe segmentul AC , astfel încât $MN = 5$ cm. Dacă $BC \subset \alpha$ și $A \notin \alpha$, stabilește poziția dreptei MN față de planul α .



- 10** $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată de vârf V . Dacă $BM \perp VA$, $M \in VA$, $BN \perp VC$, $N \in VC$, arată că:
 a) $MN \parallel (ABC)$; b) $AC \parallel (MNB)$.
- 11** Dacă $ABCD A'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu baza pătratul $ABCD$, precizează poziția relativă a următoarelor perechi de drepte:
 a) AC' și CA ; b) AC' și BC ; c) AC' și $A'D$;
 d) $A'D$ și $B'C$; e) $A'D$ și BC' ; f) AC și BD ;
 g) AC și $D'B'$.
- 12** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , M este mijlocul lui VB și N este mijlocul lui VC .
 a) Arată că punctele A , D , M , N sunt coplanare.
 b) Stabilește poziția relativă a dreptelor AD și VB , AD și BC , AB și VA , VD și AC , AC și VA , MN și VB .
- 13** $ABC A'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată cu baza triunghiul ABC . Stabilește poziția dreptei AA' față de planele (ABC) , (CBB') , (ABB') , (BCA') .
- 14** În tetraedrul $ABCD$, punctele M , N , P și Q sunt mijloacele muchiilor AB , BC , CA , respectiv AD . Arată că:
 a) $MN \parallel (ADC)$; b) $BC \parallel (MQP)$; c) $BD \parallel (MNQ)$.
- 15** În tetraedrul $VABC$, G_1 este centrul de greutate al feței VAB și G_2 este centrul de greutate al feței VAC . Arată că $G_1 G_2 \parallel (ABC)$.
- 16** Dacă $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , având toate muchiile congruente, $AC \cap BD = \{O\}$ și $BM \perp VA$, $M \in VA$, stabilește poziția dreptei OM față de planele (VDC) și (VBC) .
- 17** Se consideră tetraedrul $ABCD$, E mijlocul muchiei AC , iar F proiecția ortogonală a vârfului A pe bisectoarea exterioară a unghiului ADB . Demonstrează că dreapta EF este paralelă cu planul (BCD) .
- 18** În piramida triunghiulară $MATE$, de vârf M , cu $TA = TE$, se consideră TB bisectoarea unghiului $\widehat{MTA}$ și TC bisectoarea unghiului $\widehat{MTE}$. Demonstrează că $BC \parallel (ATE)$.
- 19** Pătratele $ABCD$ și $CDEF$ sunt situate în plane diferite. Demonstrează că:
 a) $AB \parallel (CDE)$; b) $AE \parallel (BCF)$; c) $BF \parallel (ACE)$.
- 20** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, O centrul feței $ABCD$ și O' centrul feței $A'B'C'D'$. Demonstrează că:
 a) $OO' \parallel (CDD')$; b) $AO' \parallel (BC'D)$.
- 21** Se consideră tetraedrul $ABCD$ și punctele M , E , F situate pe muchiile AB , AC , respectiv AD , astfel încât $ME \parallel BC$ și $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}$. Demonstrează că:
 a) $ME \parallel (BCD)$; b) $CD \parallel (BEF)$.
- 22** Se consideră planul α și punctele M , P , Q , astfel încât $P, Q \in \alpha$ și $M \notin \alpha$. Știind că $E \in MP$, $ME = 2$ cm, $EP = 5$ cm, $F \in MQ$, $MF = 4$ cm, $FQ = x$ cm și $EF \parallel \alpha$, calculează x .
- 23** Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ având vârful S , cu toate muchiile egale. Notăm cu O centrul bazei $ABCD$, M mijlocul muchiei SC și N mijlocul muchiei SD . Demonstrează că:
 a) $OM \parallel (SAD)$; b) $MN \parallel (ABC)$;
 c) $ON \parallel (SBA)$; d) $ON \parallel (SBM)$.
- 24** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, O_1 centrul feței $ABCD$, O_2 centrul feței $ADD'A'$. Demonstrează că:
 a) $O_1 O_2 \parallel (C'D'D)$; b) $O_1 O_2 \parallel (A'BC')$.
- 25** În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ se notează cu E mijlocul muchiei $C'D'$ și cu F centrul feței $ADD'A'$.
 a) Stabilește poziția dreptei BB' față de planul (ACC') .
 b) Stabilește poziția dreptei EF față de planul (ABC') .
- 26** Se consideră $ABCD$ un tetraedru regulat, R mijlocul muchiei AD , S mijlocul muchiei BD . Știind că RP este bisectoarea unghiului BRC , $P \in BC$, demonstrează că:
 a) $RS \parallel (ABC)$; b) $CD \parallel (PRS)$.
- 27** Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABC A'B'C'$, cu baza triunghiul ABC , O centrul feței $BCC'B'$, iar M mijlocul muchiei AB . Demonstrează că:
 a) $OM \parallel (ACC')$; b) $AC' \parallel (OMC)$.
- 28** Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$, $AB = 8$ cm, iar M , N și P sunt mijloacele muchiilor BC , AD , respectiv AC .
 a) Calculează perimetrul triunghiului MNP .
 b) Demonstrează că $MP \parallel (ANB)$.



LECȚIA 8

Plane paralele



Poziii relative a două plane

- Dacă două plane au în comun trei puncte necoliniare, atunci ele coincid (conform axiomei A_4). Spunem că planele sunt *confundate*, *identice* sau *coincidente* (vezi figura 71).
- Dacă două plane diferite au în comun un punct, atunci ele au o dreaptă comună. În acest caz spunem că planele sunt *secante* (vezi figura 72). $\alpha \cap \beta = d$, α, β sunt *plane secante*.

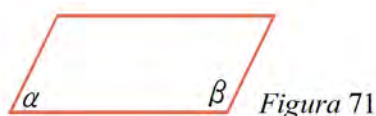


Figura 71

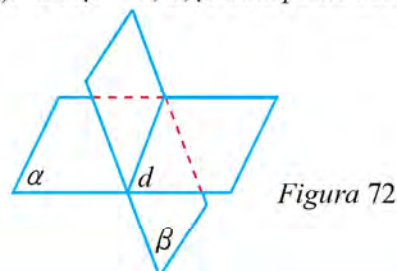


Figura 72

Definiție

Două plane care nu au niciun punct comun se numesc *plane paralele*.

Exemplu

Plafonul și podeaua unei camere sunt plane paralele. În figura 73 am reprezentat două plane paralele α și β .
Avem $\alpha \cap \beta = \emptyset$ și scriem $\alpha \parallel \beta$.



Figura 73



Teoreme de paralelism: proprietăți

Următoarea teoremă demonstrează existența planelor paralele.

Teorema 1

Dacă printr-un punct exterior unui plan se duc două drepte paralele cu două drepte concurente conținute în acel plan, aceste drepte determină un plan paralel cu planul dat.

Ipoteză	Concluzie
$a \cap b = \{O\}$ $O \notin \beta$ $a \parallel c, c \subset \beta$ $b \parallel d, d \subset \beta$	$(a, b) \parallel \beta$

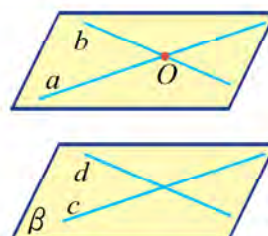


Figura 74

Demonstrație

Presupunem că planul (a, b) nu este paralel cu planul β . Aceste plane nu coincid, pentru că planul (a, b) conține dreapta α , în timp ce planul β nu o conține. Deci planele (a, b) și β sunt secante; fie d , dreapta lor comună. Dreapta d poate fi paralelă cel mult cu una dintre dreptele a sau b (altfel, prin punctul O ar trece două drepte paralele cu d , ceea ce este absurd). Deci d intersectează cel puțin una dintre dreptele a sau b . Dacă d intersectează dreapta a în A , atunci punctul A aparține în același timp dreptei a și planului β , ceea ce contrazice ipoteza. Analog, se ajunge la contradicție dacă presupunem că dreapta d intersectează dreapta b . Contradicția obținută dovedește că $(a, b) \parallel \beta$ (vezi figura 74).

Temă**recomandată pentru lucru în echipe**

Arată că planele bazelor unei prisme triunghiulare drepte sunt paralele. Raționamentul este analog pentru o prismă dreaptă care are ca bază un poligon oarecare.

REȚINE!

Planele bazelor unei prisme drepte sunt paralele.

Din teorema 1, deducem modalitatea de construcție a unui plan care trece printr-un punct dat și este paralel cu un plan dat. Se poate demonstra că acest plan este unic. Deci are loc:

Proprietatea 1

Printr-un punct exterior unui plan se poate duce *un singur* plan paralel cu planul dat.

În cele ce urmează, enunțăm alte câteva proprietăți de paralelism, utile în rezolvarea problemelor.

Proprietatea 2

Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă dintr-un plan este paralelă cu celălalt plan (vezi figura 75).

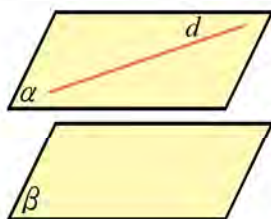


Figura 75

Proprietatea 3

Intersecțiile a două plane paralele cu un al treilea plan sunt două drepte paralele (vezi figura 76).

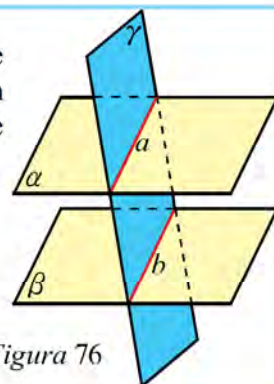


Figura 76

Proprietatea 4

Două plane distincte, paralele cu un al treilea plan, sunt paralele între ele (vezi figura 77).

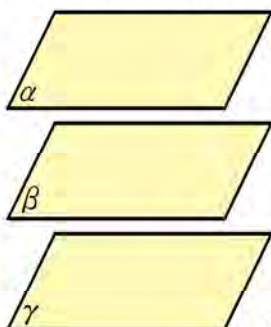


Figura 77

**Investigație****Temă****Recomandată pentru lucru în echipe**

Caută exemple din realitatea înconjurătoare care să constituie modele pentru aceste proprietăți. Folosind notațiile din figurile corespunzătoare, exprimă enunțul fiecăreia dintre proprietățile 2-4 în limbaj matematic, scriind ipoteza și concluzia.

Teorema 2

Două plane paralele care intersectează două drepte paralele determină pe acestea segmente congruente.

Ipoteză	Concluzie
$\alpha \parallel \beta$ $d_1 \parallel d_2$ $d_1 \cap \alpha = \{A\}, d_1 \cap \beta = \{B\}$ $d_2 \cap \alpha = \{C\}, d_2 \cap \beta = \{D\}$	$AB \equiv CD$

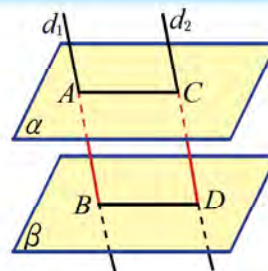


Figura 78

Demonstrație

Planul (d_1, d_2) intersectează planele α și β după dreptele paralele AC și BD . Deoarece din ipoteză avem și $AB \parallel CD$, rezultă că $ABDC$ este paralelogram, deci $AB \equiv CD$.

**Probleme rezolvate**

- 1 Demonstrează că trei plane paralele determină pe două secante segmente proporționale.

Soluție Considerăm trei plane paralele α, β, γ și dreptele a, b care le intersectează în punctele A, B, C , respectiv A', B', C' (vezi figura 79). Prin punctul A , ducem dreapta c paralelă cu b care intersectează planele β și γ în punctele B'' , respectiv C'' . Planul (a, c) intersectează planele β și γ după dreptele paralele BB'' și CC'' .

Din teorema lui Thales, avem $\frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''}$. Cum $AB'' = A'B'$ și $B''C'' = B'C'$, rezultă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

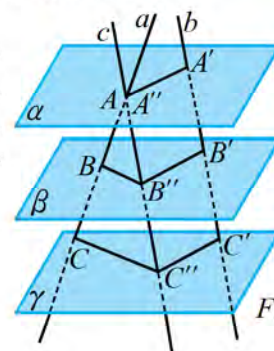


Figura 79

Proprietatea pe care am demonstrat-o în problema de mai sus este cunoscută sub numele de teorema lui Thales în spațiu.

- 2 În figura 80 este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, având vârful V și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Punctele R și Q sunt mijloacele segmentelor VB , respectiv BC , iar punctul P se află pe muchia AB , astfel încât $AP = 3 \cdot PB$. Demonstrează că planele (PQR) și (VOC) sunt paralele.

Soluție Notăm cu M mijlocul muchiei AB . Deoarece $AP = 3 \cdot PB$, rezultă că $AB = AP + PB = 4 \cdot PB$, deci $PB = \frac{AB}{4}$. Cum $BM = \frac{AB}{2}$, rezultă că $PB = \frac{BM}{2}$, deci P este mijlocul segmentului BM . Dar și Q este mijlocul segmentului BC , deci PQ este linie mijlocie în $\triangle BMC$, de unde obținem $PQ \parallel CM$ (1).

RQ este linie mijlocie în triunghiul VBC , de unde obținem $RQ \parallel VC$ (2).

Din relațiile (1) și (2) și ținând cont că $PQ, RQ \subset (PQR)$ și $PQ \cap RQ = \{Q\}$, obținem că $(PQR) \parallel (VOC)$.

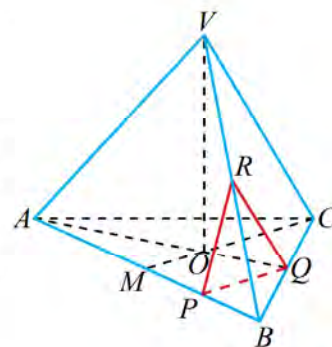


Figura 80


FIXARE
EXERSARE
CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Imaginează-ți cele 6 plane ce formează clasa în care înveți (cei 4 pereți, tavanul și podeaua).
a) Precizează toate perechile de plane paralele.
b) Precizează toate planele care sunt secante cu planul tavanului.
- 2 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată cu baza ABC . Arată că $(ABC) \parallel (A'B'C')$.
- 3 Se consideră $ABCD$ o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC , A' , B' și C' sunt mijloacele muchiilor laterale DA , DB , respectiv DC .
Arată că $(A'B'C') \parallel (ABC)$.
- 4 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, iar M , N și P sunt mijloacele muchiilor $A'C'$, AA' , respectiv BB' .
a) Arată că $(MNP) \parallel (C'AB)$.
b) Dacă $\{Q\} = (MNP) \cap C'B'$, arată că Q este mijlocul lui $C'B'$.
- 5 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Se consideră punctele $M \in VA$, $N \in VB$, $P \in VC$, astfel încât $\frac{VM}{MA} = \frac{3}{4}$, $\frac{VN}{NB} = \frac{3}{7}$, $\frac{VP}{PC} = \frac{7}{4}$.
a) Arată că $(MNP) \parallel (DCB)$.
b) Dacă $\{Q\} = (MNP) \cap VD$ și $AB = 70$ cm, calculează $\mathcal{A}_{MNPQ}$.
- 6 $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ este o prismă hexagonală. Arată că:
a) $(BCB') \parallel (FEE')$;
b) $(BDD') \parallel (AEE')$; c) $(ADD') \parallel (BCC')$.
- 7 Se consideră $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) $(ABC) \parallel (A'B'D')$;
b) $(ABC) \cap (A'DD') = AA'$;
c) $(ABC) \cap (A'DD') = AD$;
d) $(ABB') = (A'B'A)$;
e) $(ACC') \cap (A'B'C') = A'C'$;
f) $(ADD') \parallel (B'C'C)$;
g) $(BD'D) = (BB'C)$.
- 8 Paralelogramul $ABCD$ și triunghiul ADE sunt situate în plane diferite. Dacă notăm cu M și N mijloacele laturilor AE , respectiv DE , iar O este centrul paralelogramului $ABCD$, arată că $(MNO) \parallel (BEC)$.
- 9 Se consideră $ABCD$ un tetraedru regulat și $M \in AD$, $N \in BD$ și $P \in CD$, astfel încât $\frac{MA}{MD} = \frac{1}{2}$, $\frac{NB}{BD} = \frac{1}{3}$ și $\frac{PD}{DC} = \frac{2}{3}$.
a) Arată că $(MNP) \parallel (ABC)$.
b) Dacă $AB = 10$ cm, află aria triunghiului MNP .
- 10 Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are vârful V și $VA = AB = 8$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor VD , respectiv VC . Notăm $\{O\} = AC \cap BD$.
a) Arată că perimetrul triunghiului MON este egal cu 12 cm.
b) Demonstrează că planele (MON) și (VAB) sunt paralele.
- 11 Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$, având vârful S și punctele M , N , P și Q pe muchiile SA , SB , SC , respectiv SD , astfel încât $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$, $\frac{SN}{NB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CP}{SC} = \frac{2}{3}$ și $\frac{DQ}{SQ} = 2$.
a) Demonstrează că dreptele AP , BQ , CM și DN sunt concurente.
b) Demonstrează că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.
- 12 În figura 81 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm. Punctele O și Q sunt centrele fețelor $ABCD$, respectiv $BCC'B'$.
a) Calculează aria triunghiului BOQ .
b) Demonstrează că planele (COQ) și $(A'DC')$ sunt paralele.

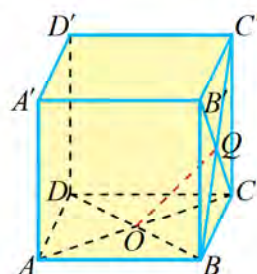


Figura 81



LECȚIA 9

Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpuri geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)

⇒ **Secțiuni paralele cu baza în prismă**

Se consideră o prismă patrulateră dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ și un plan α paralel cu bazele care intersectează muchiile laterale AA' , BB' , CC' și DD' , respectiv în M , N , P , Q . Spunem că patrulaterul $MNPQ$ reprezintă secțiunea determinată în prismă de planul α (vezi figura 82).

Planul $ABB'A'$ intersectează planele paralele α și (ABC) după dreptele paralele MN și AB . Cum avem și $AM \parallel BN$, patrulaterul $ABNM$ este paralelogram, deci $AB \equiv MN$. La fel se arată că celelalte laturi ale patrulaterului $MNPQ$ sunt congruente și paralele cu laturile patrulaterului $ABCD$. Patrulaterul $ABCD$ și $MNPQ$ au unghiurile respectiv congruente, ca unghiuri cu laturile respectiv paralele. Raționamentul rămâne valabil dacă în locul unei prisme patrulatere drepte considerăm o prismă dreaptă, având ca bază un poligon oarecare.

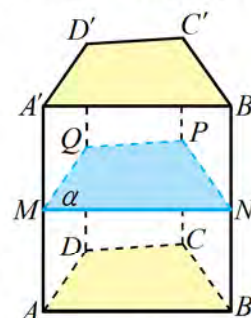


Figura 82

Spunem că două poligoane sunt congruente dacă au laturile respectiv congruente și unghiurile corespunzătoare congruente.

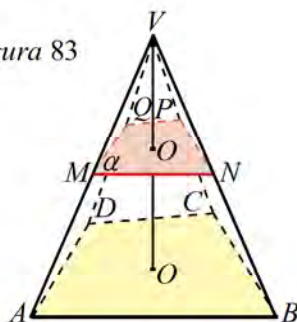
REȚINE!

O secțiune paralelă cu baza unei prisme este un poligon congruent cu poligonul bazei.

⇒ **Secțiuni paralele cu baza în piramidă**

Considerăm o piramidă patrulateră $VABCD$ și un plan α paralel cu planul (ABC) care intersectează muchiile laterale VA , VB , VC , VD , respectiv în M , N , P și Q . Spunem că patrulaterul $MNPQ$ reprezintă secțiunea determinată în piramidă de planul α (vezi figura 83).

Figura 83



Planul (VAB) intersectează planele paralele α și (ABC) după dreptele paralele MN și AB . Din teorema fundamentală a asemănării, avem

$$\begin{aligned} \triangle VMN \sim \triangle VAB, \text{ de unde } \frac{MN}{AB} &= \frac{VM}{VA}. \text{ Analog, din } MQ \parallel AD \text{ obținem } \frac{VM}{VA} = \\ &= \frac{MQ}{AD} = \frac{VQ}{VD}. \text{ Din } QP \parallel DC \text{ și } PN \parallel CB \text{ avem în final } \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \\ &= \frac{QM}{AD}. \end{aligned}$$

În plus, unghiurile patrulaterului $MNPQ$ sunt congruente cu ale patrulaterului $ABCD$, ca unghiuri cu laturile respectiv paralele. Raționamentul rămâne valabil dacă, în locul unei piramide patrulatere, considerăm o piramidă cu baza un poligon oarecare.

REȚINE!

O secțiune paralelă cu baza unei piramide este un poligon asemenea cu poligonul bazei.



Trunchiul de piramidă

Un plan care intersectează muchiile unei piramide și este paralel cu baza acesteia o împarte în două poliedre. Unul dintre poliedre este piramida care are vârful comun cu piramida dată și ca bază poligonul de secțiune. Celălalt corp va fi numit în continuare *trunchi de piramidă*.

Astfel, în figura 84, $ABCMNP$ este un trunchi de piramidă. Poligoanele ABC și MNP reprezintă bazele trunchiului de piramidă (ABC este baza mare, MNP este baza mică), iar $ABNM$, $BCPN$ și $ACPM$ sunt fețele laterale ale trunchiului de piramidă.

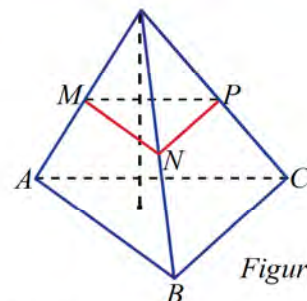


Figura 84

Bazele trunchiului de piramidă sunt două poligoane asemenea situate în plane paralele, iar fețele laterale ale trunchiului de piramidă sunt trapeze.

Denumirea trunchiului de piramidă este dată de numărul laturilor poligoanelor bazelor. Astfel, vorbim de trunchi de piramidă triunghiulară, patrulateră etc. Un trunchi de piramidă care provine dintr-o piramidă regulată se numește *trunchi de piramidă regulată*. În figura 85, de exemplu, am reprezentat un trunchi de piramidă hexagonală regulată.

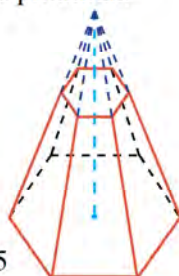


Figura 85



Problemă rezolvată

Piramida $VABC$ triunghiulară regulată cu latura bazei egală cu 2 cm se secționează cu un plan α paralel cu baza ABC ce trece prin mijlocul muchiei laterale VA după un triunghi $A'B'C'$. Determină perimetrul triunghiului $A'B'C'$ (vezi figura 86).

Soluție Din asemănarea triunghiurilor $VA'B'$ și VAB , avem $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{A'B'}{2}$, rezultă $A'B' = 1$ cm, de unde $P_{A'B'C'} = 3$ cm.

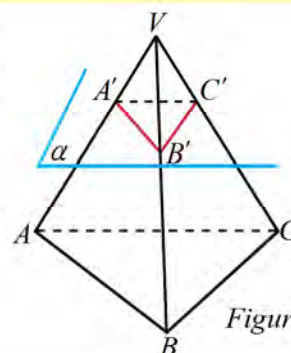


Figura 86



Trunchiul de con

Un plan care intersectează un con circular drept și este paralel cu baza acestuia împarte conul în două corpuri: un con circular drept, care are vârful comun cu conul inițial și ca bază discul de secțiune, și celălalt corp care va fi numit în continuare *trunchi de con* (vezi figura 87).

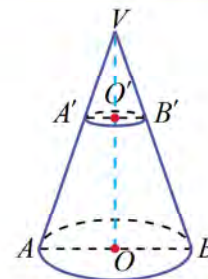


Figura 87



Problemă rezolvată

Secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza, dus prin mijlocul unei generatoare. Știind că aria discului de secțiune este egală cu 64π cm², calculează circumferința cercului care reprezintă baza conului inițial (vezi figura 88).

Soluție Fie R raza bazei conului și R' raza secțiunii. Din ipoteză $\pi R'^2 = 64\pi$, deci $R' = 8$ cm. Din asemănare $\frac{R'}{R} = \frac{1}{2}$, de unde $R = 16$ cm. Lungimea discului de cerc care reprezintă baza conului este $2\pi R = 32\pi$ cm.

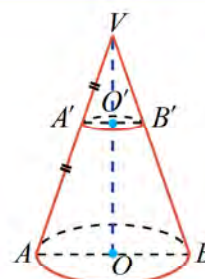


Figura 88



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 $ABCD A' B' C' D'$ este o prismă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, $AB = 2\sqrt{2}$ cm și M este mijlocul muchiei AA' . Un plan α ce trece prin punctul M și este paralel cu planul (ABC) secționează prisma.
 - a) Desenează secțiunea pe care o determină planul α în prismă.
 - b) Află aria și perimetrul poligonului de secțiune.
- 2 Piramida $VABC$ se secționează cu un plan α paralel cu baza ABC , obținându-se ca secțiune triunghiul MNP cu $\mathcal{P}_{MNP} = \frac{\mathcal{P}_{ABC}}{2}$.
 - a) Desenează secțiunea MNP .
 - b) Arată că planul α trece prin mijlocul muchiei laterale.
- 3 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, de vârf V , cu latura bazei egală cu $10\sqrt{2}$ cm. Punctul $M \in VA$ astfel încât $VM = \frac{1}{4}VA$. Un plan α ce trece prin punctul M intersectează piramida după patrulaterul $MNPQ$. Calculează aria și perimetrul patrulaterului $MNPQ$.
- 4 Desenează:
 - a) un trunchi de piramidă triunghiulară regulată în care latura bazei mici reprezintă jumătate din latura bazei mari;
 - b) un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care latura bazei mici reprezintă $\frac{2}{3}$ din latura bazei mari.
- 5 $ABCA' B' C'$ este o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral ABC , M este un punct pe segmentul AA' astfel încât $\frac{MA'}{AA'} = \frac{2}{5}$. Un plan α ce trece prin punctul M și este paralel cu planul (ABC) intersectează prisma după triunghiul MNP , punctul N aparține muchiei BB' și punctul P aparține muchiei CC' .
 - a) Desenează intersecția planului α cu prisma.
 - b) Calculează valoarea rapoartelor $\frac{NB'}{NB}$ și $\frac{PC}{CC'}$.
- 6 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V . Piramida se secționează cu un plan α paralel cu planul (ABC) , dus prin mijlocul muchiei VA . Se obține ca secțiune un triunghi cu perimetrul egal cu 12 cm.
 - a) Desenează secțiunea în piramidă.
 - b) Determină aria bazei piramidei.
- 7 Se consideră piramida $VABC$ cu vârful V . Secționăm piramida cu un plan paralel cu planul (ABC) , dus prin punctul A' situat pe muchia VA , care intersectează muchiile VB , VC în punctele B' , respectiv C' . Știind că raportul ariilor triunghiurilor $A' B' C'$ și ABC este egal cu $\frac{1}{9}$ și $AB = 24$ cm, calculează $A' B'$.
- 8 Tetraedrul regulat $ABCD$ se secționează cu planul (MNP) , paralel cu planul (BCD) , $M \in AB$, $N \in AC$, $P \in AD$. Știind că $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$, calculează raportul dintre aria triunghiului MNP și aria triunghiului BCD .
- 9 Un con circular drept având raza $R = 10$ cm este secționat cu un plan paralel cu baza, care trece prin mijlocul unei generatoare. Calculează aria secțiunii.
- 10 Se consideră un trunchi de piramidă regulată $ABC A_1 B_1 C_1$ (vezi figura 89), cu baza triunghi echilateral. Dacă $AB = 12$ cm, $A_1 B_1 = 6$ cm și $AA_1 = 9$ cm, determină lungimea muchiei laterale a piramidei din care provine trunchiul.

Figura 89
- 11 Conul circular drept cu diametrul bazei $AB = 32$ cm și generatoarea $VA = 20$ cm se secționează cu un plan paralel cu baza, care conține centrul de greutate al triunghiului VAB (vezi figura 90). Calculează aria secțiunii.

Figura 90





TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Dacă dreapta d este paralelă cu planul α , atunci $d \cap \alpha = \dots$
- 5p 2 Dacă $MNPQRS$ este o prismă triunghiulară regulată, atunci dreapta MQ și planul (NPR) sunt $\dots$
- 5p 3 În cubul $ALGEBRIC$, planele (ALG) și (BRI) sunt $\dots$
- 5p 4 În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, o pereche de drepte paralele este formată din dreptele $\dots$ și $\dots$
- 5p 5 Valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci ea este paralelă cu orice dreaptă din acest plan”, este $\dots$
- 5p 6 Dacă $d_1 \parallel d_2$ și $d_2 \parallel d_3$, atunci $\dots$ sau $\dots$

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Triunghiul ABC are latura AB inclusă în planul α și $C \notin \alpha$. Dacă punctul M se află pe latura AC , $\frac{AM}{MC} = 3$, punctul N se află pe latura BC , $\frac{CN}{NB} = x$ și $MN \parallel \alpha$, atunci valoarea lui x este:
 A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 4
- 5p 2 Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat, E mijlocul muchiei AB , F mijlocul muchiei AC , atunci unghiul dintre dreptele EF și CD are măsura de:
 A. 90° B. 45° C. 30° D. 60°
- 5p 3 În cubul $ABCD A' B' C' D'$ unghiul dintre dreptele AD și BC' are măsura de:
 A. 45° B. 90° C. 60° D. 30°
- 5p 4 Se consideră A, B, C, D patru puncte necoplanare și punctele M, N, P situate pe muchiile AD, BD , respectiv CD , astfel încât: $\frac{AM}{MD} = 0, (3), \frac{BN}{ND} = 0,25$ și $\frac{DP}{PC} = 3$. Atunci planele (ABC) și (MNP) :
 A. coincid B. sunt paralele C. au o dreaptă comună D. au un punct comun
- 5p 5 Dacă $ABCD$ și $CDEF$ sunt două paralelograme situate în plane diferite, atunci dreptele AB și EF :
 A. coincid B. sunt paralele C. sunt necoplanare D. sunt concurente
- 5p 6 Piramida patrulateră regulată $SPION$ cu vârful S are toate muchiile congruente. Unghiul dintre dreptele SO și IP are măsura de:
 A. 60° B. 30° C. 45° D. 90°

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful V , notăm cu G_1 centrul de greutate al triunghiului VAB și cu G_2 centrul de greutate al triunghiului VBC .

- 10p a) Demonstrează că $G_1 G_2 \parallel (ABC)$.
- 10p b) Știind că $G_1 G_2 = 12$ cm, calculează perimetrul triunghiului ABC .
- 10p c) Știind că $AB = VA = 36$ cm, calculează sinusul unghiului dintre dreptele AG_1 și CG_2 .



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera **A**, în caz contrar, încercuiește litera **F** (20 de puncte).

- | | | |
|----|---|--|
| 5p | 1 | Un cub are lungimea muchiei egală cu 5 cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 60 cm. |
| | | A F |
| 5p | 2 | În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, unghiul dintre dreptele AD și CG are măsura de 0° . |
| | | A F |
| 5p | 3 | În piramida triunghiulară regulată $SABC$, cu vârful S , punctele M și N sunt mijloacele muchiilor SA , respectiv SB . Dreapta MN este paralelă cu planul (ABC) . |
| | | A F |
| 5p | 4 | În cubul $ALGEBRIC$, dreptele AL și BC sunt paralele. |
| | | A F |

SUBIECTUL al II-lea. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect din coloana **B** (20 de puncte).

Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$, punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor AB, BC , respectiv CD și $AB = 6$ cm.

A

B

- | | | | |
|-----------|----------|--|-------------------------|
| 5p | 1 | Unghiul dintre dreptele NP și DM este egal cu . . . | b. 30° |
| 5p | 2 | Unghiul dintre dreptele MN și CD este egal cu . . . | c. 9 cm |
| 5p | 3 | Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului este egală cu . . . | d. $3(2 + \sqrt{2})$ cm |
| 5p | 4 | Perimetrul triunghiului MNP este egal cu . . . cm. | e. 60° |

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

- 1** Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Notăm $AC \cap BD = \{O\}$ și $BC' \cap B' C = \{Q\}$.

10p a) Arată că dreapta OQ este paralelă cu planul $(A' DC')$.

10p b) Arată că planele $(B' OQ)$ și $(A' DC')$ sunt paralele.

2 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = AA' = 4\sqrt{3}$ cm și $BC = 4$ cm (vezi figura 91). Notăm $AD' \cap A' D = \{O_1\}$ și $AB' \cap A' B = \{O_2\}$.

10p a) Arată că $O_1 O_2 = 4$ cm.

10p b) Calculează măsura unghiului dintre dreptele CD și $A' B$.

10p c) Demonstrează că dreptele $B' O_1$ și $D' O_2$ sunt coplanare.

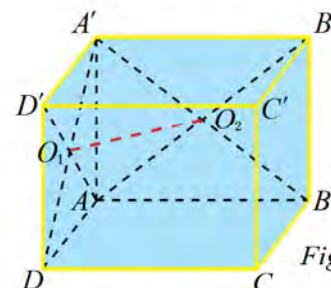


Figura 91

Descarcă din manualul digital, apoi completează fisa de observare a unității.



LECȚIA 10

Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan

Din clasele anterioare știm că, în plan, două drepte sunt perpendiculare dacă unghiul celor două drepte este un unghi drept. Această definiție se extinde în mod firesc și pentru două drepte în spațiu.

Definiție

Dacă a și b sunt două drepte din spațiu, spunem că dreapta a este perpendiculară pe dreapta b dacă unghiul acestor drepte are măsura de 90° .

Exemplu

Dacă $ABCD A' B' C' D'$ este un cub, atunci $A' B' \perp AD$ pentru că $\widehat{A' B' A D} = \angle DAB = 90^\circ$ (vezi figura 92). Analog $C' D' \perp BC$, $B' C' \perp AB$ etc.

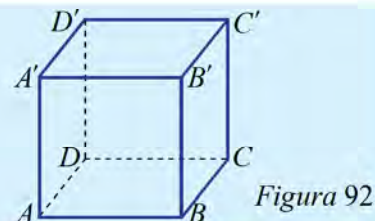


Figura 92



Dreapta perpendiculară pe un plan

O ușă are forma unui dreptunghi, latura inferioară este perpendiculară pe dreapta determinată de balamale. Pentru orice poziție a ușii, dreapta balamalelor este perpendiculară pe marginea de jos a ușii (vezi figura 93).

Acest exemplu arată existența unei drepte perpendiculare pe toate dreptele conținute într-un plan. Spunem că dreapta determinată de balamalele ușii este perpendiculară pe planul podelei.

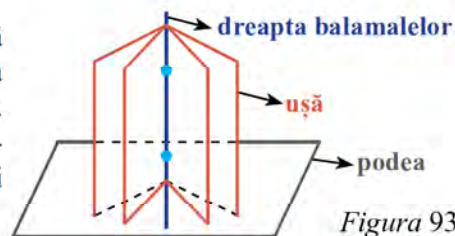


Figura 93

Definiție

O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe toate dreptele conținute în acel plan.

Observații

1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci ea „înțeapă” planul.
2. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci orice dreaptă paralelă cu dreapta dată este perpendiculară pe plan.

Conform definiției, pentru a demonstra că o dreaptă este perpendiculară pe un plan, ar trebui să dovedim că ea este perpendiculară pe toate dreptele planului. Vom demonstra însă o teoremă care furnizează o metodă mai simplă prin care putem stabili faptul că o dreaptă este perpendiculară pe un plan.

Teoremă

O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă și numai dacă este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în acel plan.

Ipoteză	Concluzie
$d \perp a$ $d \perp b$ a și b sunt concurente $a \subset \beta$ $b \subset \beta$	$d \perp \beta$

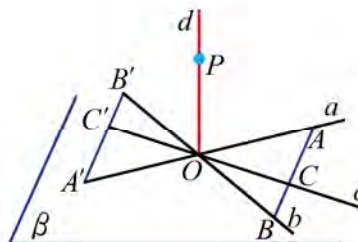


Figura 94

Demonstrație• *Suficiența:*

Fie O intersecția dreptei d cu planul β . Trebuie să demonstrăm că dreapta d este perpendiculară pe orice dreaptă c din planul β . Dacă dreapta c este paralelă cu una dintre dreptele a sau b , atunci afirmația este evidentă. Putem presupune că dreptele a, b, c trec prin punctul O (în caz contrar, considerăm paralele la aceste drepte, care să treacă prin O). Fie punctul $P \in d$ și punctele $A \in a$ și $B \in b$, astfel încât dreapta c să intersecteze segmentul AB . Notăm cu C punctul de intersecție. Notăm cu A' și B' simetricile punctelor A și B față de O . Rezultă că $ABA'B'$ este paralelogram, iar O este centrul său de simetrie. Înseamnă că simetricul C' al lui C față de O aparține segmentului $A'B'$; segmentele AC și $A'C'$, fiind simetrice față de O , sunt congruente. Cum dreapta d este mediatoarea segmentului AA' , avem $PA \equiv PA'$.

Analog, $PB \equiv PB'$. Deoarece avem și $AB \equiv A'B'$ (laturi opuse în paralelogram), deducem că $\triangle PAB \equiv \triangle PA'B'$ (L.L.L.). În consecință $\angle PAC \equiv \angle PA'C'$ și, de aici, $\triangle PAC \equiv \triangle PA'C'$ (L.U.L.). Rezultă că $PC \equiv PC'$. În triunghiul isoscel PCC' , PO este mediană, deci este și înălțime, adică $d \perp c$ (vezi figura 94).

Cum dreapta c este oarecare, rezultă că $d \perp \beta$.

• *Necesitate:*

În mod evident, dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, deci pe toate dreptele conținute în plan, este perpendiculară pe orice două drepte concurente din plan.

Aplicația 1

Se consideră $ABCA'B'C'$, o prismă triunghiulară dreaptă. $ABB'A'$ și $ACC'A'$ sunt dreptunghiuri, deci AA' este perpendiculară pe dreptele concurente AB și AC . De aici rezultă că $AA' \perp (ABC)$ (vezi figura 95).

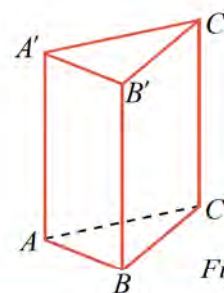


Figura 95

Raționamentul de mai sus se poate aplica pentru muchiile laterale ale oricărei prisme drepte.

REȚINE!

Muchiile laterale ale unei prisme drepte sunt perpendiculare pe planul bazei.

Aplicația 2

Considerăm un paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu dimensiunile $a = AB$, $b = BC$ și $c = AA'$ (vezi figura 96). Ne propunem să calculăm lungimea d a diagonalei AC' . Cum $CC' \perp (ABCD)$, rezultă $CC' \perp AC$, deci

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Rezultă $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

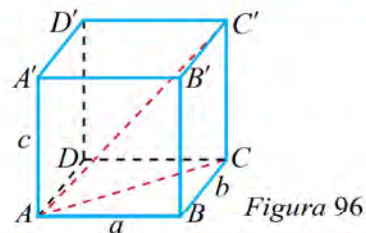


Figura 96

REȚINE!

Diagonala paralelipipedului dreptunghic de dimensiuni a, b, c este:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Putem enunța alte două proprietăți utile în legătură cu noțiunea de dreaptă perpendiculară pe un plan.

Proprietatea 1

- Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci este perpendiculară pe orice plan paralel cu acesta (vezi figura 97).
- Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele (vezi figura 97).

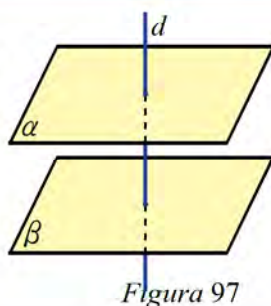


Figura 97

Proprietatea 2

Două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele (vezi figura 98).

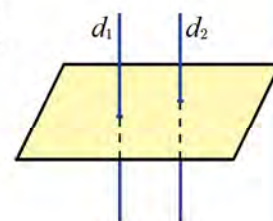


Figura 98


FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE
PROBLEME


- În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, indică pe ce fețe este perpendiculară dreapta:
 - BB' ;
 - AD ;
 - $A' B'$.
- Se consideră prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$, având ca bază pătratul $ABCD$. Arată că:
 - $AA' \perp (ABC)$;
 - $BC \perp (DCD')$;
 - $AD \perp (DCD')$;
 - $BD \perp (ACC')$;
 - $AC \perp (DBB')$.
- Se consideră perpendiculara AD pe planul triunghiului dreptunghic ABC cu $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $\angle BAC = 90^\circ$. Dacă $AD = 6$ cm, calculează BD , DC și DM , unde M este mijlocul lui BC .
- Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = 16$ cm și $AD = 15$ cm. Dacă $AM \perp (ABC)$, $AM = 5$ cm, calculează MB , MC , MD .
- $ABCD$ este un romb cu $AB = 18$ cm și $\angle B = 120^\circ$. Dacă $AM \perp (ABC)$, $AM = 6\sqrt{2}$ cm, calculează MB , MC , MD .
- În prisma triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$, M este mijlocul lui BC , $AB = 4$ cm și $AA' = 2\sqrt{3}$ cm. Calculează $A' M$.
- Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ cu lungimea laturii egală cu 6 cm se ridică perpendiculara AM , astfel încât $AM = 6$ cm. Calculează MB , MC , MD , MP , unde $\{P\} = FD \cap CE$.
- Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Dacă O este centrul feței $ADD' A'$, M este mijlocul laturii BC și $AB = 6$ cm, calculează $A' C$, $A' M$, OM , OC' .
- Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC cu ipotenuza BC , de lungime $4\sqrt{2}$ cm, se ridică perpendiculara AM . Dacă $MB = 6$ cm, calculează AM .
- Pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan este suficient să fie perpendiculară pe două drepte din plan? Argumentează răspunsul!

LECȚIA 11

Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

Definiție

- Dacă un punct A este situat într-un plan α , distanța de la punctul A la planul α este egală cu zero.
- Dacă punctul A este exterior planului α , spunem că distanța de la punctul A la planul α este lungimea segmentului AA' , unde $AA' \perp \alpha$ și $A' \in \alpha$.

Notăm $d(A, \alpha) = AA'$ și citim: „distanța de la punctul A la planul α este AA' ” (vezi figura 99).

În acest caz, A' este piciorul perpendicularei dusă din punctul A pe planul α .

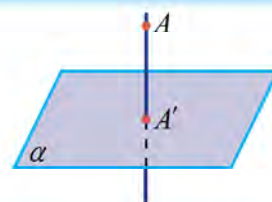


Figura 99

Observație

Definiția precedentă pune problema unicității segmentului AA' perpendicular pe α ($A' \in \alpha$).

Teoremă

Perpendiculara dusă dintr-un punct exterior unui plan pe acel plan este unică.

Demonstrație

Dacă, prin absurd, am presupune că din $A \notin \alpha$ se pot construi două perpendiculare diferite AA' și AA'' pe α , atunci am avea $AA' \perp A'A''$ și $AA'' \perp A'A'$, deci suma măsurilor unghiurilor triunghiului $AA'A''$ ar fi mai mare decât 180° , fals. Prin urmare, se poate construi o singură perpendiculară dintr-un punct exterior unui plan pe acel plan (vezi figura 100).

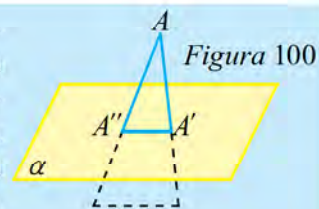


Figura 100

Observație

Distanța de la punctul A la planul α reprezintă lungimea celui mai mic segment cu un capăt în A și celălalt capăt în α . Într-adevăr, oricare ar fi $M \in \alpha, M \neq A'$, unde $A' \in \alpha$ și $AA' \perp \alpha$, avem $AM > AA'$ (în triunghiul dreptunghic $AA'M$ ipotenuza este mai mare decât cateta AA'). Spunem că AM este oblică și că oblica este mai mare decât perpendiculara (vezi figura 101).

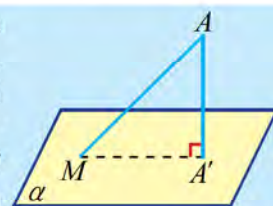


Figura 101



Înălțimea unei piramide

Prin înălțimea unei piramide înțelegem segmentul ce are ca lungime distanța dintre vârful piramidei și planul bazei. Astfel, pentru piramida patrulateră $VABCD$, înălțimea este segmentul VV' , unde $VV' \perp (ABCD)$, $V' \in (ABCD)$ (vezi figura 102).

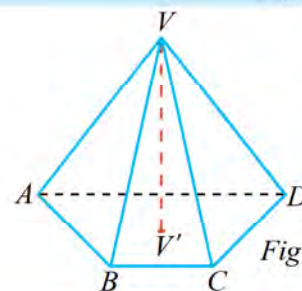


Figura 102

Observație

În cazul unui tetraedru, deoarece oricare dintre cele patru fețe ale sale poate fi considerată bază, există 4 înălțimi.

⇒ Înălțimea unui con circular drept

Prin înălțimea unui con circular drept înțelegem segmentul determinat de vârful conului și centrul bazei conului. În figura 103, înălțimea conului circular drept este VO , unde O este centrul bazei.

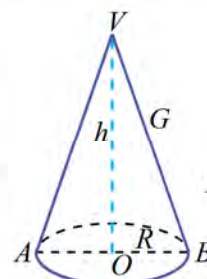


Figura 103

Observație

Dacă R, h, G reprezintă raza, înălțimea, respectiv generatoarea unui con circular drept, are loc relația $G^2 = R^2 + h^2$.


Probleme rezolvate

- 1** Se consideră $SABC$ o piramidă triunghiulară, având ca bază triunghiul echilateral ABC . Demonstrează că $SA = SB = SC$, dacă și numai dacă piciorul perpendicularei din S pe planul (ABC) este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Soluție Fie $SO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Rezultă că SO este perpendiculară pe OA, OB și OC , deci triunghiurile SOA, SOB și SOC sunt dreptunghice în O (vezi figura 104). Dacă $SA = SB = SC$, atunci triunghiurile SOA, SOB și SOC sunt congruente (conform cazului I.C.), de unde rezultă $OA = OB = OC$, adică O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Reciproc, dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , avem $OA = OB = OC$, de unde rezultă că triunghiurile SOA, SOB și SOC sunt congruente (conform cazului C.C.), de unde rezultă $SA = SB = SC$.

Un raționament asemănător se poate face pentru cazul în care baza piramidei este un poligon regulat cu n laturi ($n \geq 3$). De aici deducem un mod de a caracteriza piramidele regulate.

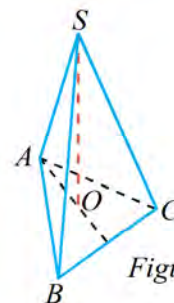


Figura 104

- 2** Aria bazei unui con circular drept este $256\pi \text{ cm}^2$, iar generatoarea conului are lungimea de 20 cm. Determină lungimea înălțimii conului (vezi figura 105).

Soluție Baza conului este discul de centru O și rază R . Prin urmare, $\pi R^2 = 256\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow R = 16 \text{ cm}$. Dacă VAB este o secțiune axială în con, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul VOA , $\widehat{VOA} = 90^\circ$, obținem $h = VO = 12 \text{ cm}$.

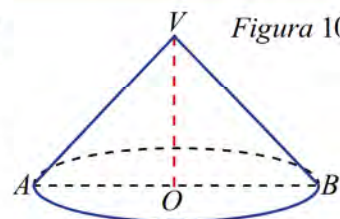


Figura 105

- 3** Calculează lungimea înălțimii unui tetraedru regulat având muchia de lungime l , $l > 0$.

Soluție Considerăm tetraedrul regulat $ABCD$, $AB = l$, O centrul cercului circumscris triunghiului BCD , M mijlocul lui BC . Rezultă $DM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ și $DO = \frac{2}{3} \cdot DM = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle AOD$, dreptunghic în O , obținem $OA = \frac{l\sqrt{6}}{3}$, deci înălțimea tetraedrului este $\frac{l\sqrt{6}}{3}$.

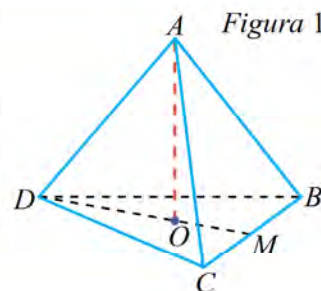


Figura 106

REȚINE!

O piramidă este regulată dacă și numai dacă baza este un poligon regulat, iar înălțimea „cade” în centrul cercului circumscris poligonului.





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , $VA = 25$ cm, $AB = 10\sqrt{2}$ cm și înălțimea VO . Calculează VO .
- 2 O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de lungime 5 cm și muchia laterală de lungime 8 cm. Calculează lungimea înălțimii piramidei.
- 3 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC și înălțimea VO . Dacă $VO = 6$ cm, $AB = 6$ cm și M este mijlocul lui BC , calculează VA și VM .
- 4 Se consideră prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$, având ca bază pătratul $ABCD$. Știind că $AB = 4$ cm și $AA' = 6$ cm, calculează:
 - a) distanța de la punctul A la planul $(B' C' D')$;
 - b) distanța de la punctul B la planul (CDD') ;
 - c) distanța de la punctul A la planul (BDD') .
- 5 Pe planul pătratului $ABCD$ de latură 10 cm, se ridică perpendiculara PA , $PA = 8$ cm. Calculează:
 - a) distanța de la punctul C la planul (PAD) ;
 - b) distanța de la punctul B la planul (PAC) .
- 6 Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are muchia laterală $VA = 10$ cm și muchia bazei $AB = 5\sqrt{2}$ cm.
 - a) Demonstrează că triunghiul VAC este echilateral.
 - b) Calculează aria triunghiului VAC .
- 7 Se consideră triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu 12 cm și un punct M exterior planului (ABC) , astfel încât $MA = MB = MC$ și $d(M, (ABC)) = 4$ cm. Calculează MA .
- 8 Un con circular drept are raza, înălțimea și generatoarea egale cu $x + 1$, $2x + 5$, respectiv $3x$, $x > 0$. Determină x .
- 9 Raza, înălțimea și generatoarea unui con circular drept sunt exprimate prin trei numere naturale consecutive. Determină lungimea generatoarei conului.
- 10 Într-un con circular drept raza și înălțimea au aceeași lungime. Determină lungimea generatoarei conului, știind că aria bazei conului este egală cu 289π cm².
- 11 O piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 5 cm și latura bazei de lungime $4\sqrt{2}$ cm. Determină lungimea muchiei laterale a piramidei.
- 12 O piramidă patrulateră regulată are raza cercului circumscris bazei de $6\sqrt{2}$ cm și suma lungimilor muchiilor laterale egală cu 48 cm. Calculează lungimea înălțimii piramidei.
- 13 Se consideră triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu 18 cm și un punct P exterior planului (ABC) , astfel încât $PA = PB = PC = 12$ cm. Calculează distanța de la punctul P la planul (ABC) .
- 14 Se consideră $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , $VA \perp VC$ și $VA = 16$ cm.
 - a) Calculează distanța de la punctul A la planul (VBD) .
 - b) Calculează lungimea înălțimii piramidei.
- 15 Fie M un punct exterior planului pătratului $ABCD$ cu $AB = 12$ cm. Știind că $MA = MB = MC = MD = 9$ cm, calculează distanța de la punctul M la planul (ABC) .
- 16 Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $AD = DC = 6$ cm. Pe planul trapezului construim perpendiculara PA . Calculează:
 - a) distanța de la punctul B la planul (PAD) ;
 - b) distanța de la punctul C la planul (PAD) .
- 17 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un cub de muchie 8 cm. Calculează:
 - a) distanța de la punctul A la planul (BDD') ;
 - b) distanța de la punctul C' la planul $(A' BD)$.
- 18 În prisma dreaptă $ABCA' B' C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC și $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $AA' = 4$ cm, se consideră punctele M, N, P mijloacele muchiilor AB, BC , respectiv $A' C'$. Calculează:
 - a) distanța de la punctul B la planul (ACC') ;
 - b) distanța de la punctul A' la planul (MNP) .
- 19 Se consideră cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu $AB = 8$ cm. Notăm cu E proiecția punctului A_1 pe planul $(AB_1 D_1)$.
 - a) Calculează lungimea înălțimii din A_1 a piramidei $A_1 AB_1 D_1$.
 - b) Arată că punctele A_1, E și C sunt coliniare.



LECȚIA 12

Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept

Fie α și β două plane paralele. Arătăm că distanța de la orice punct al planului α la planul β este aceeași. Fie $A, B \in \alpha$, $AA' \perp \beta$, $BB' \perp \beta$, unde $A', B' \in \beta$.

Dreptele AA' și BB' , fiind perpendiculare pe același plan, sunt paralele și rezultă că $AA' = BB'$ (vezi figura 107).

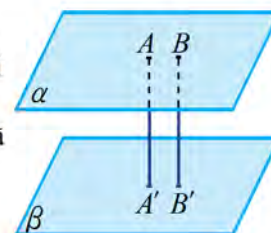


Figura 107

Definiții

- Distanța dintre două plane paralele este distanța de la un punct oarecare al unui plan la celălalt plan.
- Înălțimea unei prisme este lungimea segmentului perpendicular pe planele bazelor prisme, având capetele în cele două plane.

Observații

1. Înălțimea unei prisme drepte este egală cu lungimea muchiei laterale.
2. Prin înălțimea unui paralelipiped dreptunghic vom înțelege un segment perpendicular pe planele bazelor, dacă acestea sunt precizate. În caz contrar, orice segment perpendicular pe două fețe opuse, având capetele în cele două plane poate fi considerat înălțime.
3. Prin înălțimea unui cilindru circular drept se înțelege orice segment perpendicular pe baze, având capetele în cele două plane ale bazelor.
4. Prin înălțimea unui trunchi de piramidă, ca și prin înălțimea unui trunchi de con circular drept se înțelege orice segment perpendicular pe baze, având capetele în cele două plane ale bazelor (vezi figura 108).

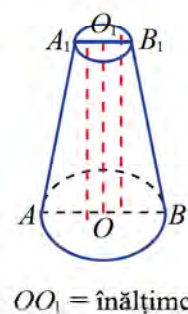
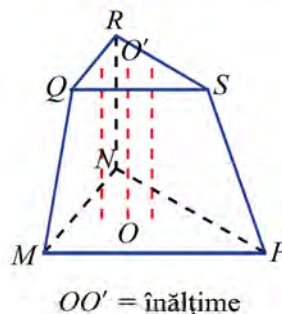
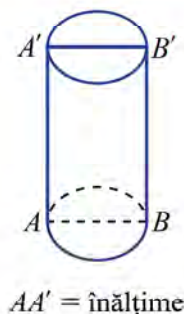
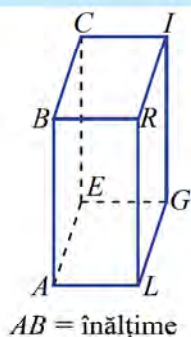


Figura 108



Aplicații: secțiuni axiale, secțiuni diagonale în corpurile studiate

- Fiind dat un poliedru P , vom numi axa sa de simetrie o dreaptă d cu proprietatea că simetricul oricărui punct de pe poliedru față de dreapta d aparține poliedrului.
- Fiind dat un corp care admite axă de simetrie, se numește *secțiune axială* poligonul obținut prin secționarea printr-un plan care conține axa de simetrie a corpului.

Observații

- Secțiunile axiale în poliedre sunt variabile ca formă.
- Secțiunile axiale care conțin o diagonală a unei baze se numesc *secțiuni diagonale*.
- Secțiunile axiale în corpurile rotunde sunt congruente.

Secțiune axială într-o piramidă patrulateră regulată	Secțiune diagonală într-o piramidă patrulateră regulată	Secțiune axială într-o prismă patrulateră regulată	Secțiune diagonală într-o prismă patrulateră regulată	Secțiune axială într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată	Secțiune axială într-un cilindru circular drept	Secțiune axială într-un con circular drept	Secțiune axială într-un trunchi de con circular drept
---	--	---	--	--	--	---	--

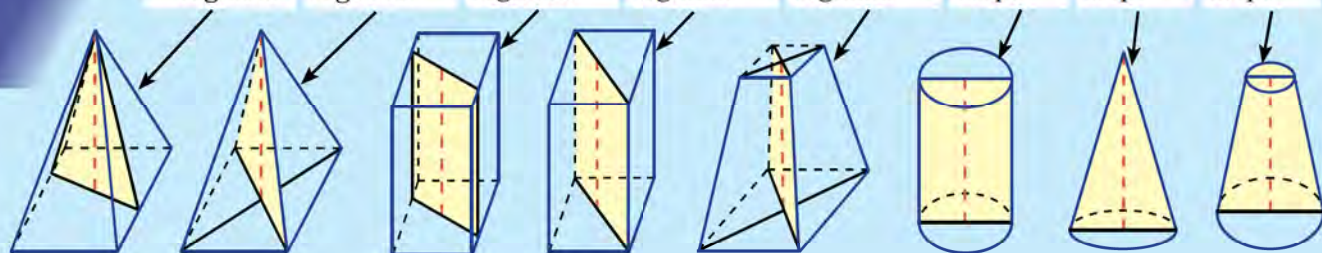


Figura 109



Probleme rezolvate

- 1 Prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ are muchia bazei $AB = l$ și înălțimea $AA' = l\sqrt{3}$, $l > 0$. Aria secțiunii diagonale este egală cu $25\sqrt{6} \text{ cm}^2$.
- a) Calculează distanța dintre planele (ABC) și $(A' B' C')$. b) Calculează lungimea diagonalei prisme.

Soluție a) Secțiunea diagonală este, de exemplu, dreptunghiul $ACC' A'$.

Din ipoteză $A_{ACC' A'} = 25\sqrt{6} \text{ cm}^2$, deci $AC \cdot AA' = 25\sqrt{6}$.

Rezultă $l\sqrt{2} \cdot l\sqrt{3} = 25\sqrt{6}$, de unde obținem $l = 5 \text{ cm}$.

Cum $(ABC) \parallel (A' B' C')$ și $AA' \perp (ABC)$, rezultă că distanța dintre cele două plane este egală cu lungimea segmentului AA' , adică este de $5\sqrt{3} \text{ cm}$.

b) Din formula lungimii diagonalei unui paralelipiped dreptunghic, avem: $d_{\text{prismă}} = AC' = \sqrt{l^2 + l^2 + (l\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{5} \text{ cm}$ (vezi figura 110).

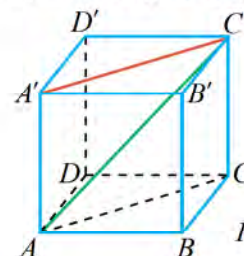


Figura 110

- 2 Un con circular drept având $R = 24 \text{ cm}$ și $h = 10 \text{ cm}$, se secționează cu un plan paralel cu baza, dus prin mijlocul înălțimii (vezi figura 111). Determină lungimea generatoarei trunchiului de con care se formează.

Soluție Notăm cu VAB secțiunea axială a conului și cu A' și B' punctele de intersecție dintre planul de secțiune și generatoarele VA , respectiv VB ale conului. $O' A'$ este linie mijlocie în $\triangle VOA$, deci $O' A' = 12 \text{ cm}$. Ducând $A' M \perp AB$, $M \in AB$, obținem $A' M = OO' = 5 \text{ cm}$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle A' M A$, dreptunghic în M , rezultă că $AA' = 13 \text{ cm}$, deci generatoarea trunchiului de con are lungimea egală cu 13 cm .

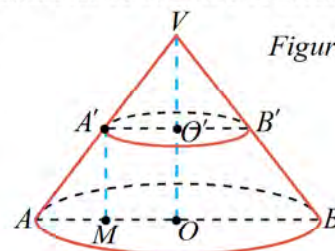


Figura 111





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Se consideră $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful S . Un plan α , paralel cu planul (ABC) intersectează muchiile SA , SB și SC în A' , B' , respectiv C' . Dacă $SA = 12$ cm, $SA' = 4$ cm și $SO = 9$ cm, unde O este centrul bazei ABC , calculează distanța dintre planele (ABC) și $(A'B'C')$.
- 2 Se consideră $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = 4\sqrt{2}$ cm, iar O este centrul bazei $ABCD$. Știind că $A'O = 5$ cm, calculează:
 - a) lungimea înălțimii prisme;
 - b) aria secțiunii diagonale a prisme.
- 3 Paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ are dimensiunile AB , AD , AE proporționale cu numerele 3, 2, respectiv 5. Știind că suma tuturor muchiilor paralelipipedului este egală cu 80 cm, calculează:
 - a) distanța dintre planele (ABC) și (EFG) ;
 - b) lungimea diagonalei paralelipipedului.
- 4 Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm.
 - a) Arată că planele $(A'BD)$ și $(B'CD')$ sunt paralele.
 - b) Calculează distanța dintre planele $(A'BD)$ și $(B'CD')$.
- 5 Se consideră $ABCA_1B_1C_1$ o prismă dreaptă în care baza ABC este un triunghi echilateral cu $AB = 8$ cm. Fie D , E și F mijloacele muchiilor AB , BC , respectiv B_1C_1 .
 - a) Arată că planele (DEF) și (ACC_1) sunt paralele.
 - b) Calculează distanța dintre planele (DEF) și (ACC_1) .
- 6 Se consideră $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $VA = 10$ cm. Prin mijlocul înălțimii piramidei se duce un plan paralel cu baza. Calculează înălțimea trunchiului de piramidă care se formează.
- 7 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are aria bazei mici egală cu $9\sqrt{3}$ cm² și aria bazei mari egală cu $81\sqrt{3}$ cm². Se face o secțiune cu un plan paralel cu bazele la aceeași distanță față de ambele baze. Calculează aria secțiunii.
- 8 Se consideră $ABCD A_1B_1C_1D_1$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 2$ dm, $BC = 2\sqrt{2}$ dm și $AA_1 = 1$ dm. Pe segmentul AD_1 se consideră punctele R și S , astfel încât $AR = RS = SD_1$. Planele α și β sunt paralele cu planul (ABC) și $R \in \alpha$, $S \in \beta$.
 - a) Calculează lungimea segmentul AD_1 .
 - b) Calculează distanța dintre planele α și β .
- 9 În figura 112 este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 16$ cm și $A'B = 20$ cm. Pe muchiile AA' , BB' și CC' luăm punctele M , N , respectiv P , astfel încât $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}$, $\frac{BN}{BB'} = \frac{1}{2}$ și $\frac{C'P}{CC'} = 2$.
 - a) Arată că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.
 - b) Calculează distanța dintre planele (MNP) și (ABC) .

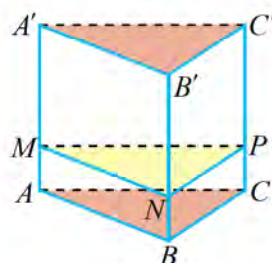


Figura 112





TEST

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Dacă a și b sunt drepte distincte, perpendiculare pe planul α , atunci dreptele a și b sunt . . .
- 5p 2 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, dreptele AD și CG sunt . . .
- 5p 3 Diagonala unui cub are lungimea de $4\sqrt{3}$ cm. Lungimea muchiei cubului este egală cu . . . cm.
- 5p 4 Lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 6 cm, $2\sqrt{6}$ cm și 2 cm este egală cu . . .
- 5p 5 Dacă $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu vârful V , $AB = VA = 4$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$, atunci lungimea segmentului VO este egală cu . . . cm.
- 5p 6 În prisma patrulateră regulată $ABCDMNPQ$, o dreaptă perpendiculară pe planul (BDQ) este dreapta . . .

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Considerăm triunghiul dreptunghic ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$, $BC = 20$ cm, $AC = 16$ cm și fie $MB \perp (ABC)$, $MB = 5$ cm. Distanța MA este egală cu:
 A. 13 cm B. 14 cm C. 15 cm D. 16 cm
- 5p 2 În cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu lungimea muchiei egală cu 4 cm, notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Lungimea segmentului $A'O$ este egală cu:
 A. 6 cm B. $2\sqrt{6}$ cm C. $4\sqrt{3}$ cm D. 8 cm
- 5p 3 Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara EA . Dacă $AB = \sqrt{7}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm și $EA = 2\sqrt{6}$ cm, distanța dintre punctele E și C este egală cu:
 A. 5 cm B. $4\sqrt{3}$ cm C. $5\sqrt{3}$ cm D. 6 cm
- 5p 4 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$, ducem perpendiculara MO , $O \in (ABC)$. Știind că $MA = MB = MC$ și $AO = 5$ cm, atunci lungimea segmentului BC este egală cu:
 A. 5 cm B. 10 cm C. 15 cm D. $5\sqrt{2}$ cm
- 5p 5 Dacă $ABCD A' B' C' D'$ este un cub cu latura de 6 cm, atunci distanța de la punctul C la planul $(AA'B)$ este egală cu:
 A. 6 cm B. $6\sqrt{2}$ cm C. $6\sqrt{3}$ cm D. 12 cm
- 5p 6 Se consideră $ABCA' B' C'$ o prismă triunghiulară regulată cu muchia laterală $AA' = 5$ cm. Dacă D este mijlocul lui AC și $B'D = 13$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu:
 A. $8\sqrt{2}$ cm B. 8 cm C. $8\sqrt{3}$ cm D. 10 cm

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

Se consideră $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată, iar SO înălțimea sa. Se știe că $SA = 26$ cm și $SO = 10$ cm.

- 10p a) Arată că $AB = 24\sqrt{3}$ cm.
- 10p b) Demonstrează că $BC \perp SA$.
- 10p c) Dacă P este mijlocul muchiei SA și D mijlocul muchiei BC , calculează lungimea segmentului PD .



LECȚIA 13

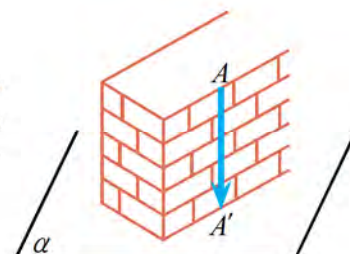
Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan



Proiecția unui punct pe un plan

În practică, pentru a verifica dacă un zid este vertical se folosește firul cu plumb (vezi figura 113). Dacă firul cu plumb este suspendat din punctul A și extremitatea sa (plumbul) atinge planul α (planul solului), spunem că A' este proiecția ortogonală a punctului A pe planul α .

Figura 113



Definiție

- Proiecția ortogonală a unui punct pe un plan care nu conține punctul este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan.
- Proiecția ortogonală a unui punct pe un plan care conține punctul este punctul însuși.

Faptul că proiecția punctului A pe planul α este A' se notează $pr_{\alpha}A = A'$.

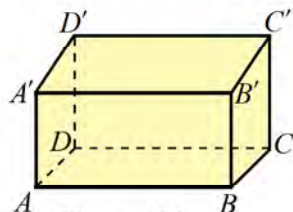


Figura 114

De exemplu, dacă $ABCD A' B' C' D'$ este un paralelipiped dreptunghic, proiecția punctului B' pe planul (ABC) este B , iar proiecția punctului A' pe planul (ABC) este A . Deci, notând $(ABC) = \alpha$, avem $pr_{\alpha}B' = B$ și $pr_{\alpha}A' = A$ (vezi figura 114).



Proiecția unei drepte pe un plan

Definiție

Proiecția ortogonală a unei figuri geometrice pe un plan este mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor figuri pe planul considerat.

Faptul că proiecția figuri F pe planul α este F' se notează $pr_{\alpha}F = F'$.

Din definiția anterioară deducem că prin proiecția unei drepte pe un plan înțelegem mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor drepte pe acel plan.

Teoremă

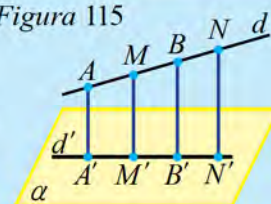
Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație

Cazul I: dreapta d nu este perpendiculară pe planul α .

Fie A, B două puncte care aparțin dreptei d și nu aparțin planului α . Notăm $pr_{\alpha}A = A'$ și $pr_{\alpha}B = B'$. Notăm cu d' , dreapta determinată de punctele A' și B' . Demonstrăm că proiecția dreptei d pe planul α este dreapta d' (vezi figura 115).

Figura 115



Dreptele AA' și BB' sunt paralele (fiind perpendiculare pe același plan), deci ele determină un plan. Notăm acest plan cu β și avem $\alpha \cap \beta = d'$.

Fie $M \in AB$ și $M' = pr_{\alpha}M$. Cum $M \in \beta$ și $MM' \parallel AA'$, rezultă $M' \in \beta$. Dar $M' \in \alpha$, deci $M' \in d'$. *Reciproc*, fie N' , un punct pe dreapta d' . Paralela la AA' dusă prin N' intersectează dreapta d în punctul N . Din $NN' \parallel AA'$ și $AA' \perp \alpha$, rezultă $NN' \perp \alpha$, deci $N' = pr_{\alpha}N$. Am arătat prin dublă incluziune că $pr_{\alpha}d = d'$.

Cazul II: dreapta d este perpendiculară pe planul α .

Notăm $d \cap \alpha = \{O\}$ (vezi figura 116).

Toate punctele dreptei d au aceeași proiecție pe planul α , și anume punctul O , deci $pr_{\alpha}d = \{O\}$.

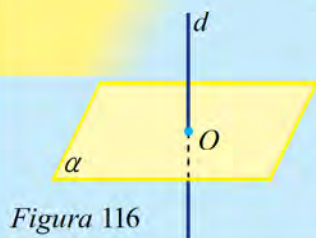
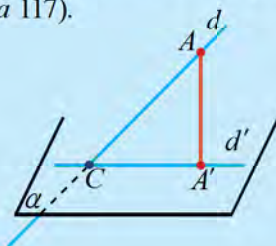


Figura 116

Observații

1. Dacă dreapta d întâlnește planul într-un punct C și nu este perpendiculară pe plan, pentru a obține proiecția ei pe plan se proiectează un punct A al dreptei în A' . Avem $A'C = pr_{\alpha}d$ (vezi figura 117).

Figura 117



2. Dacă dreapta d este paralelă pe planul α , atunci $d' = pr_{\alpha}d$ este paralelă cu d (vezi figura 118).

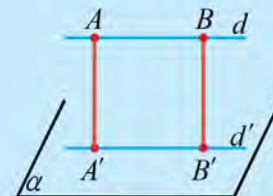


Figura 118

**Proiecția unui segment pe un plan**

Proiecția unui segment pe un plan se bazează pe următorul rezultat.

Teoremă

Proiecția unui segment pe un plan este un segment sau un punct.

REȚINE!

Dacă dreapta AB nu este perpendiculară pe planul α , atunci proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul ale cărui capete se obțin proiectând punctele A și B pe planul α .

Dacă dreapta AB este perpendiculară pe planul α , atunci proiecția segmentului AB pe planul α este punctul de intersecție a planului α cu dreapta AB .

Exemplu

Proiecțiile segmentelor din figura 119 pe planul α sunt desenate în figură și prezentate în tabelul următor.

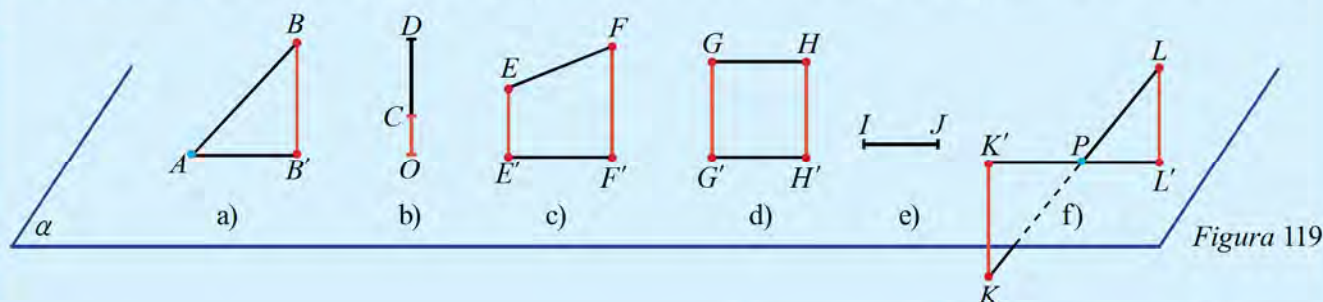


Figura 119

Ipoteză	Segmentul	Proiecția segmentului pe α
$A \in \alpha, B \notin \alpha$ și $AB \perp \alpha$ (figura 119 a))	AB	AB'
$CD \perp \alpha, C \notin \alpha, D \notin \alpha$ (figura 119 b))	CD	$\{O\}$
$E \notin \alpha, F \notin \alpha$ și $EF \parallel \alpha$ (figura 119 c))	EF	$E'F'$
$G \notin \alpha, H \notin \alpha, GH \parallel \alpha$ (figura 119 d))	GH	$G'H'$
$I \in \alpha, J \in \alpha$ (figura 119 e))	IJ	IJ
$K \notin \alpha, L \notin \alpha, KL \cap \alpha = \{P\}$ (figura 119 f))	KL	$K'L'$



Probleme rezolvate

1 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un cub. Indică, în fiecare caz, care este proiecția:

- punctului A pe planul $(B' C' D')$;
- segmentului AD' pe planul (BCD) ;
- dreptei $B' D'$ pe planul (ABC) ;
- dreptei AA' pe planul (BCD) ;
- dreptei $A' B'$ pe planul (DCC') ;
- dreptei $A' C'$ pe planul $(A' B' D')$;
- dreptei AC pe planul (ABD) .

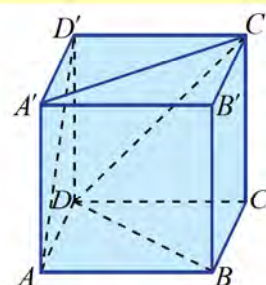


Figura 120

- Soluție**
- A' , deoarece $AA' \perp (B' C' D')$.
 - AD .
 - BD , deoarece $DD' \perp (ABC)$ și $BB' \perp (ABC)$.
 - $\{A\}$, deoarece $AA' \perp (BCD)$.
 - $D' C'$.
 - $A' C'$.
 - AC , deoarece $AC \subset (ABD)$.

2 Triunghiul isoscel ABC are latura BC inclusă în planul α , iar proiecția punctului A pe planul α este punctul D . Se știe că $BD = 8$ cm, $CD = 6$ cm și $BC = 10$ cm.

- Arată că $AB > AC$.
- Dacă $AB = BC$, calculează AC .

Soluție a) Triunghiurile ADB și ADC sunt dreptunghice ($\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$).
Avem: $AB^2 = AD^2 + DB^2 > AD^2 + DC^2 = AC^2$, deci $AB > AC$.

- b) Cu teorema lui Pitagora aplicată în $\triangle ADB$ ($\widehat{ADB} = 90^\circ$), obținem $AD = 6$ cm.
Cu teorema lui Pitagora aplicată în $\triangle ADC$ ($\widehat{ADC} = 90^\circ$), obținem $AC = 6\sqrt{2}$ cm.

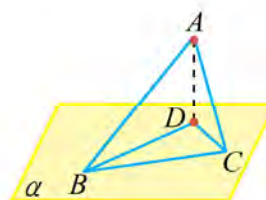


Figura 121



FIXARE



EXERSARE



CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Desenează paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ și precizează proiecția:

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| a) lui A' pe (ABC) ; | b) lui B' pe (ABC) ; |
| c) lui A' pe (BCC') ; | d) lui A pe (BCD) ; |
| e) lui A pe (BCC') ; | f) lui D pe $(A' B' B)$; |
| g) segmentului $A' B$ pe (ABC) ; | |
| h) segmentului $A' B'$ pe (ABC) ; | |
| i) segmentului $B' D'$ pe (ABC) ; | |
| j) segmentului $A' B'$ pe (BCC') ; | |
| k) segmentului $A' C$ pe (ABC) ; | |
| l) segmentului $D' B$ pe (ABC) ; | |
| m) segmentului AD' pe $(A' AD)$; | |
| n) segmentului AD' pe (BCC') . | |

- 2 $VABC$ este o piramidă triunghiulară, iar VO este înălțimea piramidei. Precizează proiecția lui:

- | | | |
|----------------------|----------------------|---------------------|
| a) V pe (ABC) ; | b) A pe (VAC) ; | c) A pe (ABC) ; |
| d) VA pe (ABC) ; | e) VB pe (ABC) . | |

- 3 Se consideră $ABCA' B' C'$ o prismă triunghiulară regulată cu baza ABC , iar M și N sunt mijloacele segmentelor BC și respectiv $B' C'$. Precizează proiecția dreptei:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a) $A' B$ pe (ABC) ; | b) $B' C'$ pe (ABC) ; |
| c) BC pe $(A' B' C')$; | d) BC' pe $(A' B' C')$; |
| e) MN pe (ABC) ; | f) $B' M$ pe (ABC) ; |
| g) NC pe (ABC) ; | h) NC pe $(A' B' C')$; |
| i) $A' M$ pe (ABC) ; | j) $A' N$ pe (ABC) ; |
| k) $A' M$ pe (BCC') ; | l) AB pe (ABC) . |

- 4 Proiecția unui segment AB pe un plan α este segmentul $A' B'$. Demonstrează că proiecția mijlocului segmentului AB pe planul α este mijlocul segmentului $A' B'$.

- 5 Fie A, B, C trei puncte necoliniare situate în planul α și M, N, P trei puncte situate în afara planului, astfel încât $AM \perp \alpha, BN \perp \alpha, CP \perp \alpha$ (vezi figura 122). Indică:

- a) Trei drepte diferite care au ca proiecție pe planul α dreapta AB .
b) Trei segmente diferite care au ca proiecție pe planul α segmentul BC .

- c) Trei triunghiuri diferite care au ca proiecție pe planul α triunghiul ABC .

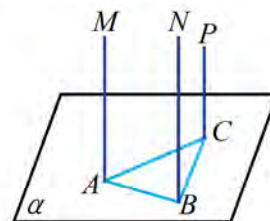


Figura 122

- 6 $ABCD A' B' C' D'$ este un cub. Precizează proiecția:

- | |
|------------------------------------|
| a) punctului A pe (DCC') ; |
| b) punctului D' pe (BCC') ; |
| c) punctului C' pe (DCD') ; |
| d) segmentului DB' pe (ABC) ; |
| e) segmentului DB' pe (ADD') ; |
| f) segmentului DB' pe (BCC') ; |
| g) segmentului DB' pe (ABA') ; |
| h) segmentului AD' pe (BDD') . |

- 7 Tetraedrul regulat $ABCD$ are muchia de lungime 9 cm. Pe muchia AD se consideră punctul M astfel încât $AM = 2 \cdot MD$. Calculează aria proiecției triunghiului MBC pe planul (ABC) .

- 8 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea VO .

- a) Arată că proiecțiile muchiilor VA, VB, VC, VD pe planul (ABC) au lungimi egale.
b) Precizează proiecția:
i) lui VA pe (VBD) ;
ii) lui VC pe (VBD) ;
iii) lui VB pe (VAC) .

- 9 Arată că proiecția unui paralelogram $ABCD$ pe un plan α , cu $AB \subset \alpha$, este un paralelogram sau un segment.

- 10 Un triunghi ABC are $AB \subset \alpha, C \notin \alpha, CC' \perp \alpha$ și $C' \in \alpha$. Arată că proiecția centrului de greutate al triunghiului ABC pe planul α este centrul de greutate al triunghiului ABC' sau un punct pe segmentul AB .

- 11 a) Dacă trei puncte sunt coliniare, demonstrează că proiecțiile lor pe un plan sunt puncte coliniare.
b) Dacă proiecțiile a trei puncte sunt coliniare rezultă că punctele sunt coliniare?



LECȚIA 14

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Lungimea proiecției unui segment pe un plan

⇒ Unghiul dintre o dreaptă și un plan

În figura 123 este reprezentat un zmeu Z ; AZ este sfoara zmeului, punctul A fiind fixat pe planul orizontal α .

Înălțimea la care se ridică zmeul depinde de unghiul pe care sfoara îl formează cu planul orizontal. Dar ce trebuie să înțelegem prin unghiul dreptei AZ cu planul α ? Notăm cu Z' proiecția zmeului pe planul solului. Vom spune că unghiul format de sfoară cu planul solului este unghiul ZAZ' .

Dacă zmeul se ridică vertical (vezi figura 124), spunem că unghiul format de dreapta AZ cu planul α este drept. Dacă zmeul se află pe sol (vezi figura 125), spunem că unghiul format de dreapta AZ cu planul α este nul.

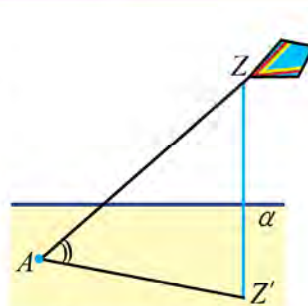


Figura 123

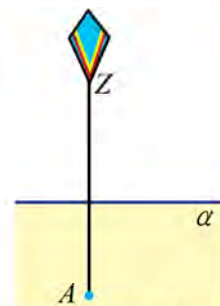


Figura 124



Figura 125

Definiții

- Dacă o dreaptă este conținută într-un plan sau este paralelă cu planul, unghiul acelei drepte cu planul este nul.
- Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, unghiul acelei drepte cu planul este drept.
- Dacă o dreaptă intersectează un plan și nu este perpendiculară pe acesta, unghiul dreptei cu planul este unghiul format de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

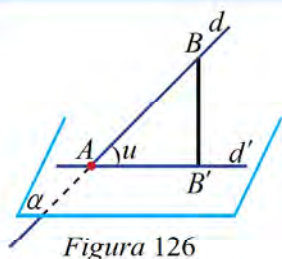


Figura 126

Din definiție rezultă că măsura în grade a unghiului dintre o dreaptă și un plan aparține intervalului $[0^\circ, 90^\circ]$. Unghiul format de dreapta d cu planul α se notează $\sphericalangle(d, \alpha)$.

În figura 126, $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(BAB')$, unde $B' = pr_\alpha B$ și $d \cap \alpha = \{A\}$.

⇒ Aplicație: lungimea proiecției unui segment pe un plan

Lungimea proiecției ortogonale a unui segment pe un plan depinde atât de lungimea segmentului, cât și de unghiul format de dreapta ce conține segmentul cu planul considerat.

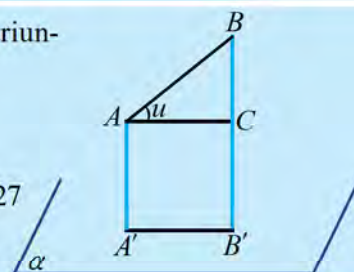
Teoremă

Fie l lungimea segmentului AB și l' lungimea proiecției sale pe un plan α care formează cu dreapta AB un unghi de măsură (în grade) $u \in [0^\circ, 90^\circ]$. Atunci $l' = l \cos u$.

Demonstrație

Fie $A' = pr_{\alpha} A$, $B' = pr_{\alpha} B$ și $AC \parallel A'B'$, $C \in BB'$. Din triunghiul dreptunghic ACB , rezultă că $AC = AB \cdot \cos u$. Cum $AC = A'B'$, rezultă că $A'B' = AB \cdot \cos u$, unde $u = \angle(AB, \alpha)$ (vezi figura 127).

Figura 127



Observații

1. Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $A'B' = AB$.
2. Dacă $AB \perp \alpha$, atunci lungimea proiecției lui AB pe α este nulă.

REȚINE!

Dacă dreapta AB formează cu planul α un unghi de măsură u , segmentul AB are lungimea l , iar proiecția sa pe planul α are lungimea l' , atunci

$$l' = \begin{cases} l \cos u & \text{dacă } u \in (0, 90) \\ l & \text{dacă } u = 0^\circ \\ 0 & \text{dacă } u = 90^\circ \end{cases}$$



Probleme rezolvate

1 În figura 128, $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, $BB' \perp \alpha$, $B' \in \alpha$.

- a) Dacă $AB = 4$ cm și $\angle(AB, \alpha) = 45^\circ$, calculează AB' .
- b) Dacă $AB = 10$ cm și $AB' = 5$ cm, calculează $\angle(AB, \alpha)$.
- c) Dacă $\angle(AB, \alpha) = 45^\circ$ și $AB' = 2$ cm, calculează AB .

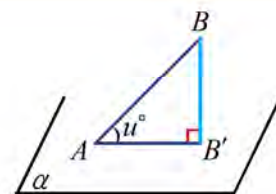


Figura 128

Soluție a) Avem $AB' = AB \cdot \cos u = 4 \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.
 b) Din $5 = 10 \cdot \cos u$ rezultă $\cos u = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, deci $u = 60^\circ$.
 c) Din $2 = AB \cdot \cos 45^\circ$ rezultă $AB = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ cm.

2 Pe planul rombului $ABCD$ se ridică perpendiculara AP . Știind că $AB = DB = 4$ cm și $AP = 4\sqrt{3}$ cm, calculează:

- a) măsura unghiului dintre dreapta PC și planul (ABC) ;
- b) măsura unghiului dintre dreapta PD și planul (ABC) .

Soluție a) $pr_{(ABC)} P = \{A\}$, $pr_{(ABC)} C = \{C\}$, deci $pr_{(ABC)} PC = AC$. Rezultă că $\angle(PC; (ABC)) = \angle(PC; AC) = \angle PCA$. Cum $PA = AC = 4\sqrt{3}$ cm și $\widehat{PAC} = 90^\circ$, rezultă că $\triangle PAC$ este dreptunghic isoscel, deci $\angle PCA = 45^\circ$.

b) $pr_{(ABC)} P = \{A\}$, $pr_{(ABC)} D = \{D\}$, deci $pr_{(ABC)} PD = AD$. Rezultă că $\angle(PD; (ABC)) = \angle(PD; AD) = \angle PDA$. Deoarece $\triangle PAD$ este dreptunghic în A și $AD = \frac{PD}{2}$, rezultă că $\angle APD = 30^\circ$ și, prin urmare, $\angle PDA = 60^\circ$.

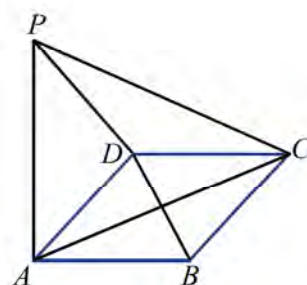


Figura 129



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Un segment AB cu lungimea de 20 cm se proiectează pe un plan α . Unghiul format de dreapta AB cu planul α are măsura de:
 - a) 45° ; b) 60° ; c) 30° .
 Determină lungimea proiecției dreptei AB pe planul α .
- 2 Segmentul AB cu lungimea de 8 cm se proiectează pe un plan α după segmentul $A'B'$. Dacă $AA' = 10$ cm și $BB' = 6$ cm, determină:
 - a) lungimea proiecției $A'B'$;
 - b) măsura unghiului format de dreapta AB cu planul α .
- 3 Triunghiul ABC are $AC \subset \alpha$, $B \notin \alpha$, $AB = 10$ cm, $BC = 10\sqrt{3}$ cm și unghiul format de AB cu planul α are măsura de 60° . Calculează măsura unghiului format de dreapta BC cu planul α și lungimea proiecției segmentului BC pe planul α .
- 4 În tetraedrul $VABC$, măsurile unghiurilor formate de dreptele VA , VB , VC cu planul (ABC) sunt egale cu 30° , 45° , respectiv 60° . Dacă $VA = 10$ cm, calculează lungimile proiecțiilor segmentelor VA , VB , VC pe planul (ABC) .
- 5 În cubul $ABCD A'B'C'D'$, determină:
 - a) măsura unghiului dintre dreapta $A'B$ și planul (ABC) ;
 - b) tangenta unghiului format de dreapta $A'C$ cu planul (ABC) .
- 6 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată cu baza ABC , $AB = 6$ cm, $AA' = 2\sqrt{3}$ cm și M este mijlocul lui BC . Calculează:
 - a) măsura unghiului dintre dreapta $A'B$ și planul (ABC) ;
 - b) tangenta unghiului format de dreapta $A'M$ cu planul (ABC) ;
 - c) lungimea proiecției segmentului AC' pe planul (BCC') .
- 7 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, $AB = 2\sqrt{2}$ cm și înălțimea $VO = 2\sqrt{3}$ cm. Calculează:
 - a) măsura unghiului dintre dreapta VA și planul (ABC) ;
 - b) lungimea proiecției muchiei VA pe planul (VBD) .
- 8 În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 6$ cm, $BB' = 12$ cm și măsura unghiului format de dreapta BD' cu planul (ABC) este de 60° .
 - a) Calculează lungimea proiecției segmentului BD pe planul (ADD') .
 - b) Calculează lungimea proiecției segmentului BD' pe planul (ADD') .
- 9 Un segment AB se proiectează pe un plan α după segmentul $A'B'$. Dacă $AA' = 4$ cm, $BB' = 7$ cm și $A'B' = \sqrt{3}$ cm, determină:
 - a) lungimea segmentului AB ;
 - b) măsura unghiului format de dreapta AB cu planul α .
- 10 Triunghiul ABC , dreptunghic în A , are ipotenuza $BC \subset \alpha$. Unghiul dreptei AB cu planul α are măsura de 30° , unghiul dreptei AC cu planul α are măsura de 60° , iar distanța de la punctul A la planul α este egală cu 9 cm. Calculează lungimile proiecțiilor laturilor triunghiului ABC pe planul α .
- 11 $ABCD A'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu latura bazei egală cu 6 cm, iar unghiul dintre dreapta $A'C$ și planul (ABC) are măsura de 30° . Calculează lungimea proiecției segmentului $A'C$ pe planul (ADD') .
- 12 Un triunghi echilateral ABC se proiectează pe un plan α ce conține punctul A , după triunghiul $AB'C'$. Dacă AB și AC fac cu planul α unghiuri congruente (și sunt de aceeași parte a lui α) și $\angle(B'AC') = 90^\circ$, determină măsura unghiului format de AC cu planul α .
- 13 Sfoara întinsă a unui zmeu are lungimea de 16 metri și formează cu solul un unghi de 30° . La ce înălțime se ridică zmeul?
- 14 Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 8$ cm, $AD = 4$ cm și $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Pe planul paralelogramului se ridică perpendiculara AS , $AS = 4$ cm. Notăm cu M mijlocul laturii CD .
 - a) Determină măsura unghiului format de dreapta SM cu planul (ABC) .
 - b) Calculează măsura unghiului format de dreapta SC cu planul (ABC) .



LECȚIA 15

Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului, unghiul a două plane



Unghi diedru

Deschizând un laptop ca în figura 130, obținem un model pentru noțiunea de unghi diedru care este analoagă cu cea de unghi din geometria plană.



Figura 130

Definiție

Se numește *unghi diedru* (sau pe scurt *diedru*), figura geometrică formată din două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.

Dreapta comună celor două semiplane se numește *muchia diedrului*, iar cele două semiplane se numesc *fețele diedrului*.

- Dacă fețele unui diedru coincid, spunem că diedrul este nul.
- Dacă fețele unui diedru sunt semiplane opuse, spunem că diedrul este plat.
- Diedrul ale cărui fețe sunt semiplanele α și β se notează (α, β) .

Pentru a compara două diedre se introduce noțiunea de unghi plan corespunzător diedrului.

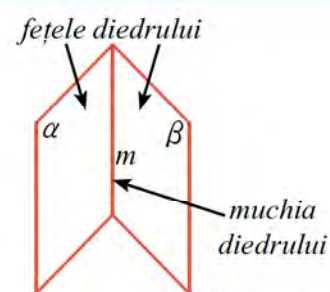


Figura 131

Definiție

Se numește *unghi plan corespunzător* unui diedru, intersecția unui diedru cu un plan perpendicular pe muchia sa.

Fie (α, β) un unghi diedru, m muchia sa și γ un plan perpendicular pe m . Notăm cu O intersecția planului γ cu muchia m . Planul γ intersectează semiplanele α și β după două semidrepte a și b cu originea în O .

Unghiul (a, b) este unghiul plan corespunzător diedrului (α, β) . Măsura unghiului plan corespunzător unui diedru nu depinde de poziția punctului O pe muchia diedrului în care a fost dus planul perpendicular pe acesta.

Toate unghiurile plane corespunzătoare unui diedru sunt congruente, fiind unghiuri cu laturile respectiv paralele.

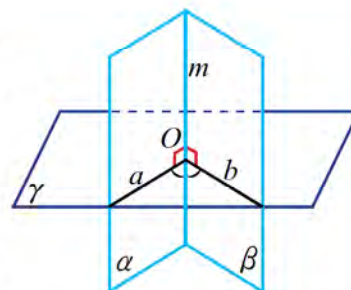


Figura 132

Definiție

Măsura unui unghi diedru este măsura unghiului plan corespunzător diedrului.

În practică, pentru a construi unghiul plan corespunzător unui diedru, se fixează un punct pe muchia diedrului și se construiesc două semidrepte perpendiculare pe muchie cu originea în acel punct și conținute în fețele diedrului.

- Dacă măsura unui unghi diedru este mai mică decât 90° , atunci diedrul este *ascuțit*.
- Dacă măsura unui unghi diedru este 90° , atunci diedrul este *drept*.
- Dacă măsura unui unghi diedru este mai mare decât 90° , atunci diedrul este *obtuz*.

⇒ Unghiul dintre două plane

Două plane secante formează patru unghiuri diedre.

Definiție

Măsura unghiului dintre două plane este egală cu măsura unui diedru ascuțit (sau drept) format de acestea.

Observație

Măsura unghiului dintre două plane este măsura unghiului dintre două drepte incluse respectiv în cele două plane și perpendiculare în același punct pe dreapta de intersecție.

În figura 133, $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} = \widehat{a}, \widehat{b}$.

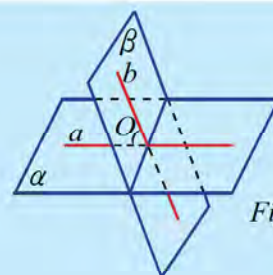


Figura 133



Probleme rezolvate

1 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = BC = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Calculează măsura unghiului dintre planele:

- a) (BCC') și (ACC') ; b) (ABD') și (ABB') ; c) (ABD') și (ABC) .

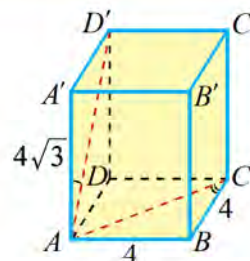


Figura 134

Soluție a) $(BCC') \cap (ACC') = CC'$, $BC \perp CC'$ și $BC \subset (BCC')$, $AC \perp CC'$ și $AC \subset (ACC')$. Rezultă că $\angle(BCC'); (ACC') = \angle BCA = 45^\circ$.

b) $(ABD') \cap (ABB') = AB$, $D'A \perp AB$ și $D'A \subset (ABD')$, $AA' \perp AB$ și $AA' \subset (ABB')$. Rezultă că $\angle(ABD'), (ABB') = \angle A'AD'$, $\text{tg}(\angle A'AD') = \frac{A'D'}{AA'} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $\angle A'AD' = 30^\circ$. c) $(ABD') \cap (ABC) = AB$, $AD' \perp AB$ și $AD' \subset (ABD')$, $AD \perp AB$ și $AD \subset (ABC)$.

Rezultă că $\angle(ABC), (ABD') = \angle D'AD$, $\text{tg}(\angle D'AD) = \sqrt{3}$, deci $\angle(D'AD) = 60^\circ$.

2 Se consideră piramida triunghiulară regulată $SABC$, cu vârful S , având toate fețele laterale triunghiuri dreptunghice isoscele. Calculează $\cos(\widehat{(SBC); (ABC)})$.

Soluție Fie M mijlocul muchiei BC , O centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ și $AB = a$, $a > 0$. Triunghiul SBC fiind dreptunghic în S , iar M mijlocul lui BC , rezultă $SM = \frac{a}{2}$; $OM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. $(SBC) \cap (ABC) = BC$, $SM \perp BC$, $SM \subset$

(SBC) , $AM \perp BC$, $AM \subset (ABC) \Rightarrow (\widehat{(SBC); (ABC)}) = \widehat{SMO}$. Triunghiul SOM este dreptunghic în O , deci $\cos(\widehat{(SBC); (ABC)}) = \cos(\widehat{SMO}) = \frac{OM}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

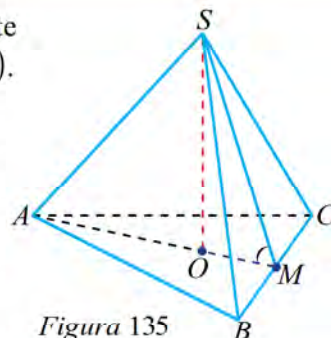


Figura 135



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 În figura 136, $ABCD$ este un dreptunghi și $ABEF$ este un trapez dreptunghic cu $AB \parallel EF$ și $\angle F = 90^\circ$. Numește unghiul plan corespunzător diedrului din figură.

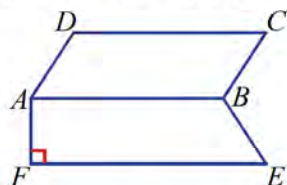


Figura 136

- 2 Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$. Determină măsura unghiului format de planele:

- a) (ABC) și (ABC') ; b) (ABC) și (BCA') ;
c) $(A'B'C')$ și $(A'B'C)$; d) (ACA') și (DBD') .

- 3 Un cort are formă de prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$. Lungimea cortului este $AD = 3,6$ m, iar muchia bazei este $AB = 1,8$ m.

- a) Calculează măsura unghiului format de dreptele BC și DF .
b) Calculează tangenta unghiului format de planele (ABC) și (BCD) .
c) Calculează cât costă pânza necesară confecționării cortului, știind că 1 m^2 de pânză costă 30 lei (se acoperă cu pânză toate fețele cortului, iar $\sqrt{3} \approx 1,73$).

- 4 Pe planul triunghiului dreptunghic isocel ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și $AC = 6$ cm, se ridică perpendiculara BD , $BD = 6\sqrt{3}$ cm. Determină măsura unghiului diedru care are fețele (ABC) și (ACD) .

- 5 Pe planul triunghiului echilateral ABC cu $AB = 8$ cm se ridică perpendiculara $AM = 4$ cm. Află măsura unghiului dintre planele (ABC) și (BCM) .

- 6 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC , $\angle A = 90^\circ$, $AC = 12$ cm, $AB = 16$ cm, se ridică perpendiculara DA , astfel încât $DA = 9,6\sqrt{3}$ cm. Determină măsurile unghiurilor diedre determinate de:

- a) (ABC) și (BCD) ; b) (ABC) și (ABD) ;
c) (ABC) și (ACD) .

- 7 Capacul unui container în formă de cub cu muchia de 1 m se deschide și este susținut de o tijă cu lun-

gimea de 1 m. Determină măsura unghiului diedru ale cărui fețe sunt cele două poziții ale capacului (închis și deschis), (vezi figura 137).

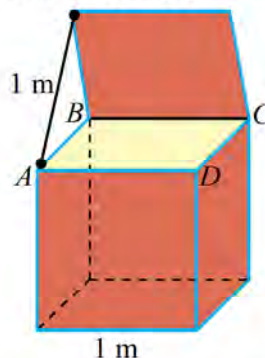


Figura 137

- 8 Prisma triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$ cu baza ABC , are $AB = 6$ cm, $AA' = 12$ cm și M este mijlocul lui CC' . Calculează:

- a) măsura unghiului dintre planele (ABB') și (ACC') ;
b) tangenta unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) ;
c) tangenta unghiului dintre planele $(A'MB)$ și (ABC) .

- 9 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei AB și muchia laterală VA . Știind că $AB = 8$ cm și $VA = 4\sqrt{5}$ cm, calculează:

- a) măsura unghiului dintre planele (VAB) și (ABC) ;
b) măsura unghiului dintre planele (VAB) și (VCD) ;
c) tangenta unghiului dintre planele (VAC) și (VAB) .

- 10 O foaie de carton dreptunghiulară, notată $ABCD$, unde $AB = 20$ cm, are latura AD conținută în planul mesei. Dacă distanța de la punctul C la planul mesei este de 10 cm, calculează măsura unghiului determinat de planul dreptunghiului și planul mesei.

- 11 Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu $AB = 4$ cm și $AD = 4\sqrt{3}$ cm, se ridică perpendiculara AM , cu $AM = 4$ cm. Determină:

- a) măsura unghiului dintre planele (MCD) și (ABC) ;
b) măsura unghiului dintre planele (MBC) și (ABC) .

- 12 Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ are $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AD = 6$ cm și $AA' = 9$ cm. Determină:

- a) tangenta unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) ;
b) măsura unghiului dintre planele $(A'BD)$ și (ABC) ;
c) tangenta unghiului dintre planele (ABC) și $(A'DC)$.



LECȚIA 16

Plane perpendiculare

Definiție

Două plane se numesc *perpendiculare* dacă formează un diedru drept.

Exemplu

Planul podelei unei săli de clasă și planul unuia dintre pereții sălii sunt două plane perpendiculare.

Dacă α și β sunt plane perpendiculare, scriem: $\alpha \perp \beta$.

În figura 138, planul ușii este perpendicular pe planul podelei.



Figura 138

Acest ultim exemplu sugerează următoarea teoremă:

Teorema 1

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan dat, atunci orice plan care conține dreapta este perpendicular pe planul dat.

Demonstrație

Fie $d \perp \alpha$, $d \cap \alpha = \{O\}$ și β un plan care conține d (vezi figura 139). Demonstrăm că $\beta \perp \alpha$.

Notăm $c = \beta \cap \alpha$, $O \in c$ și considerăm în planul α , dreapta b perpendiculară pe c , $O \in b$. Deoarece $d \perp \alpha$ și $b \subset \alpha$, rezultă că $d \perp b$. Unghiul plan corespunzător diedrului format de planele α și β este drept, deci $\alpha \perp \beta$.

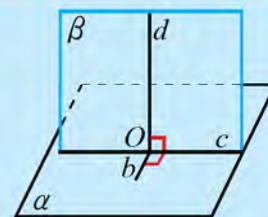


Figura 139

Observație

Această teoremă ne oferă o metodă de a demonstra că două plane sunt perpendiculare. Dacă un plan conține o dreaptă perpendiculară pe alt plan, atunci planele sunt perpendiculare.

Teorema 2

Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă conținută în unul dintre ele și perpendiculară pe dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe celălalt plan.

Demonstrație

Fie $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \perp \beta$, $d \subset \beta$ și $d \perp a$, $d \cap a = \{O\}$.
 Construim $b \subset \alpha$ și $b \perp a$. Cum $\alpha \perp \beta$, rezultă $d \perp b$.
 Deoarece $d \perp a$, rezultă $d \perp \alpha$ (vezi figura 140).

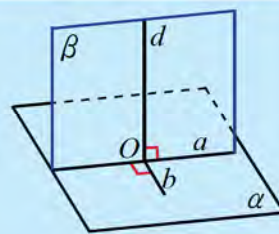


Figura 140


Problemă rezolvată

Muchia cubului $ABCD A' B' C' D'$ are 10 cm. Arată că $(BCA') \perp (ABA')$ și calculează $d(A, (A'BC))$.

Soluție Dreapta BC este perpendiculară pe dreptele AB și BB' din planul (ABA') , deci $BC \perp (ABA')$. Cum $BC \subset (BCA')$, rezultă $(BCA') \perp (ABA')$.

Intersecția planelor (BCA') și (ABA') este $A'B$. Ducem $AP \perp A'B$, $P \in A'B$ și rezultă $AP \perp (A'BC)$, deoarece $(BCA') \perp (ABA')$. Deci $d(A, (A'BC)) = AP$, unde punctul P este intersecția diagonalelor pătratului $ABB' A'$.

$$\text{Deci } AP = \frac{AB'}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

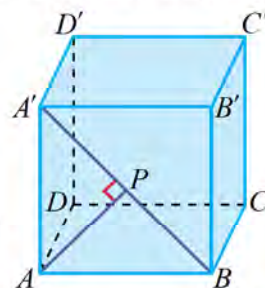


Figura 141


FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE
PROBLEME


- 1 Triunghiurile dreptunghice ABC și ABD sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $AB = AC = 16$ cm, $\angle ADB = 90^\circ$ și $AD = 8$ cm, calculează:
 a) CD ; b) $d(B, (ACD))$; c) $d(A, (BCD))$.
- 2 Dreptunghiul $ABCD$ și pătratul $ABEF$ sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $AB = 40$ cm și $BC = 30$ cm, atunci:
 a) calculează $d(C, FE)$;
 b) calculează $d(C, AE)$;
 c) arată că $(ACE) \perp (FBC)$;
 d) calculează $d(B, (CAE))$.
- 3 Triunghiurile ABC și BCD sunt dreptunghice și isoscele cu ipotenuza BC . Dacă triunghiul ABD este echilateral, arată că $(ABC) \perp (BCD)$.
- 4 Dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și $BC = 10\sqrt{3}$ cm se îndoaie după diagonala AC până când planele (ABC) și (ACD) devin perpendiculare. Calculează BD după îndoire.
- 5 Pe planul triunghiului echilateral ABC se ridică perpendiculara AD . Dacă M este mijlocul laturii BC , arată că:
 a) $(ADC) \perp (ABC)$;
 b) $(ADM) \perp (ABC)$; c) $(ADM) \perp (DBC)$.
- 6 Tetraedrul $ABCD$ are $AB = AC = AD = a$ și $BC = DC = BD = a\sqrt{2}$. Arată că:
 a) $(ABC) \perp (ACD)$; b) $(ABC) \perp (ABD)$.
- 7 Romburile $ABCD$ și $ABEF$ au $\angle ABC = \angle ABE = 45^\circ$ și sunt situate în plane diferite. Dacă triunghiul BCE este echilateral, arată că $(ABC) \perp (ABE)$.
- 8 Fie α și β două plane perpendiculare. Considerăm punctele A și B pe dreapta comună a celor două plane și punctele $C \in \alpha$, $D \in \beta$, astfel încât $AC \perp AB$, $AD \perp AB$, $AC = 3$ cm, $AB = 4$ cm și $BD = 12$ cm. Calculează: a) lungimea segmentului CD ;
 b) distanța de la punctul C la dreapta BD ;
 c) sinusul unghiului format de dreapta CD cu planul β ;
 d) cosinusul unghiului format de planul (BCD) cu planul β .



LECȚIA 17

Teorema celor trei perpendiculare

Calculul distanței de la un punct la o dreaptă

⇒ Teorema celor trei perpendiculare

În figura 142, M este un punct fixat pe clădire, iar d reprezintă o bordură. Pentru a obține o cât mai bună stabilitate ne punem problema cum trebuie ales, pe dreapta d , punctul A în care să se sprijine o scară AM perpendiculară pe d ?

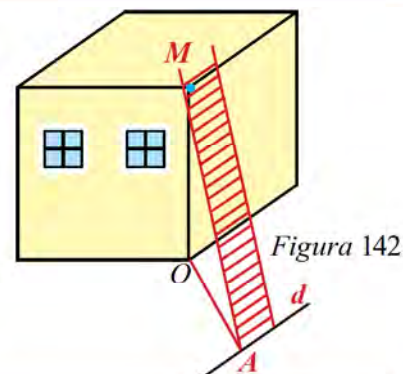


Figura 142

Răspunsul la această întrebare va fi dat cu ajutorul teoremei următoare:

Teoremă

Teorema celor trei perpendiculare

Considerăm un plan α , un punct M exterior planului și o dreaptă d inclusă în plan. Dacă O este proiecția lui M pe α și $O \notin d$, iar A este proiecția lui O pe d , atunci A este proiecția lui M pe d .

Ipoteză	Concluzie
$MO \perp \alpha, O \in \alpha$ $O \notin d, d \subset \alpha$ $OA \perp d, A \in d$	$MA \perp d$

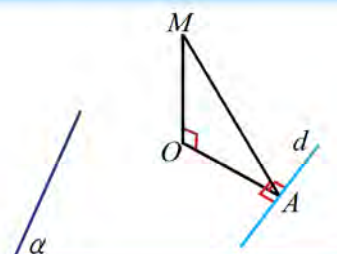


Figura 143

Demonstrație

Din faptul că $MO \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$, rezultă că $MO \perp d$. Dreapta d este perpendiculară pe dreptele MO și OA , prin urmare este perpendiculară pe planul (MOA) determinat de aceste drepte. Cum $MA \subset (MOA)$, rezultă că d este perpendiculară pe dreapta AM .

Observații

1. În ipoteza teoremei intervin două relații de perpendicularitate, $MO \perp \alpha$ și $OA \perp d$, iar concluzia reprezintă o a treia relație de perpendicularitate $MA \perp d$. De aici provine numele teoremei (vezi figura 143).
2. Aplicând teorema celor trei perpendiculare, găsim răspunsul la problema pusă la începutul acestui paragraf: punctul A reprezintă proiecția punctului O pe d .

⇒ Calculul distanței de la un punct la o dreaptă

Din teorema celor trei perpendiculare, deducem un procedeu pentru calculul distanței de la un punct M la o dreaptă d inclusă într-un plan α .

- Construim $MO \perp \alpha, O \in \alpha$.
- Construim $OA \perp d, A \in d$.
- Distanța de la punctul M la dreapta d este MA , care poate fi calculată cu teorema lui Pitagora în triunghiul MOA (triunghiul format de cele trei perpendiculare).



Problemă rezolvată

Pe planul trapezului dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, iar $AD = CD = 10$ cm, în punctul D se ridică perpendiculara $DM = 5$ cm. Calculează distanța de la punctul M la drepte: a) BC ; b) AB ; c) AC .

Soluție a) Avem $\angle BCD = 90^\circ$, deci $DC \perp CB$. Din $MD \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC)$, cu teorema celor trei perpendiculare rezultă $MC \perp BC$, deci $d(M, BC) = MC$.

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul MDC găsim $MC = 5\sqrt{5}$ cm.

b) $MD \perp (ABC)$; construim $DE \perp AB$, $E \in AB$ și din teorema celor trei perpendiculare obținem că $d(M, AB) = ME$. Având $\angle A = 45^\circ$, triunghiul AED este dreptunghic isoscel; găsim $DE = AE = 5\sqrt{2}$ cm, apoi $ME = 5\sqrt{3}$ cm.

c) Construim $DO \perp AC$, O fiind mijlocul lui AC , deoarece triunghiul DAC este isoscel. Din $MD \perp (ABC)$, $DO \perp AC$, $AC \subset (ABC)$, rezultă din teorema celor trei perpendiculare că $d(M, AC) = MO$. Vom calcula MO din triunghiul dreptunghic MOC în care cunoaștem ipotenuza $MC = 5\sqrt{5}$ cm. $AB = AE + EB$, $AB = 10 + 5\sqrt{2}$ cm și din teorema lui Pitagora în triunghiul ABC găsim $AC^2 = 200 + 100\sqrt{2}$, de aici $OC^2 = \frac{AC^2}{4} = 50 + 25\sqrt{2}$ și apoi $MO^2 = MC^2 - OC^2$; rezultă $MO = 5\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ cm.

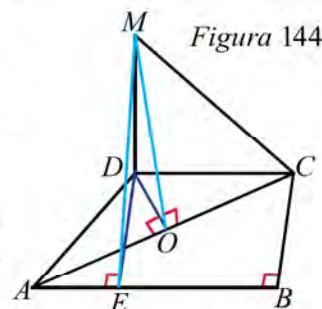


Figura 144



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 În desenele din figura 145, $AD \perp (ABC)$. Calculează în fiecare caz $d(D, BC)$.

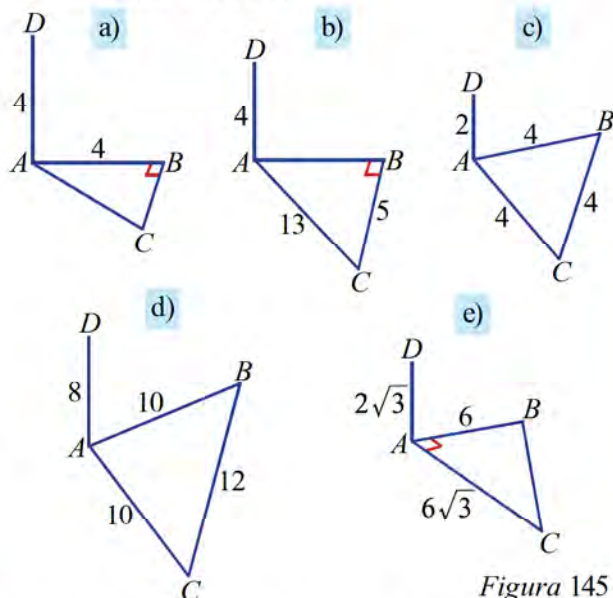


Figura 145

- 2 Pe planul pătratului $ABCD$ cu $AB = 8$ cm se ridică perpendiculara MB , $MB = 6$ cm. Calculează distanța de la punctul M la drepte AD , CD și AC .

- 3 În centrul O al unui dreptunghi $ABCD$ se ridică perpendiculara $OM = 12$ cm. Calculează distanțele de la punctul M la laturile dreptunghiului, dacă $AB = 4$ cm și $BC = 12$ cm.

- 4 Pe planul triunghiului echilateral ABC cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm se ridică perpendiculara $MO = 12$ cm, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Calculează distanța de la M la laturile triunghiului.

- 5 Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ cu latura egală cu 6 cm se ridică perpendiculara $AM = 6$ cm. Calculează $d(M, FE)$; $d(M, ED)$; $d(M, FC)$.

- 6 Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara $OM = 4$ cm, unde O este centrul pătratului. Dacă $AB = 8$ cm, calculează distanța de la punctul M la laturile pătratului.

- 7 Construiește din carton cubul $ABCD A' B' C' D'$ și colorează segmentele AA' , AB , $A'B$ și BC . Arată că $A'B \perp BC$ (vezi figura 146).

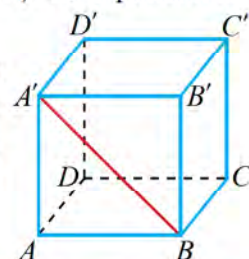


Figura 146



- 8 Pe planul rombului $ABCD$ cu $\angle A = 60^\circ$ și $AB = 6\sqrt{3}$ cm se ridică perpendiculara $AM = 6$ cm. Calculează distanțele de la M la BC , CD și BD .

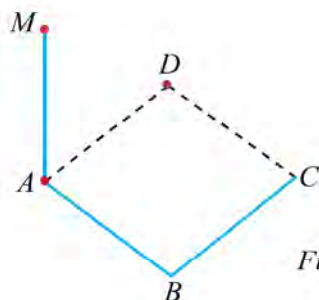


Figura 147

- 9 Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm și $BC = 9$ cm. Pe diagonala AC se consideră punctul M , astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$. În punctul M se ridică perpendiculara PM , cu $PM = 8$ cm. Calculează distanțele de la punctul P la laturile dreptunghiului.

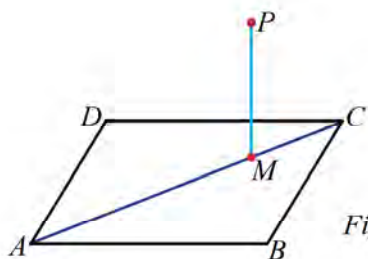


Figura 148

- 10 Se consideră $ABCDEF$ o prismă triunghiulară regulată, având latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AD = 6$ cm. Calculează:
a) distanța de la punctul F la dreapta AB ;
b) distanța de la punctul F la dreapta AM , unde M este mijlocul muchiei BC .
- 11 Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $SO = 8\sqrt{2}$ cm. Calculează:
a) distanța de la punctul S la dreapta AD ;
b) distanța de la punctul B la dreapta SC .

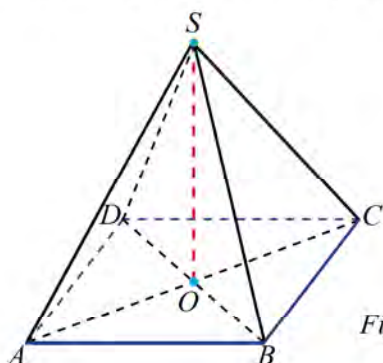


Figura 149

- 12 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm, se ridică perpendiculara AM , $AM = 1$ dm. Calculează:
a) distanța de la punctul M la dreapta BC ;
b) distanța de la punctul B la dreapta MC ;
c) distanța de la punctul C la dreapta MB .

- 13 Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABC A' B' C'$ cu latura bazei $AB = 4$ cm și înălțimea $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Fie M mijlocul muchiei AA' și punctul N pe muchia BB' , astfel încât $\frac{BN}{B'N} = \frac{1}{2}$. Calculează:
a) distanța de la punctul B la dreapta $A' C'$;
b) distanța de la punctul M la dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (MNC) .

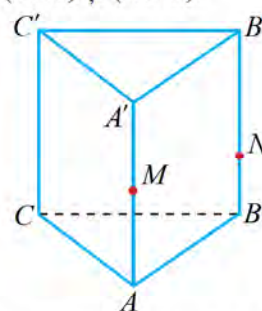


Figura 150

- 14 Se consideră prisma regulată $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = a$ cm și $AA' = 2a$ cm, $a > 0$ (vezi figura 151).
a) Calculează distanța de la punctul D' la dreapta BC .
b) Dacă $a = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ cm, demonstrează că distanța de la punctul A' la dreapta BD este mai mică decât 1,1 cm.

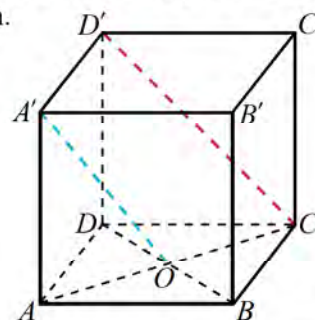


Figura 151

- 15 Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, se ridică perpendiculara $AM = 4$ cm. Determină distanțele de la M la dreptele BC , CD și BD (vezi figura 152).

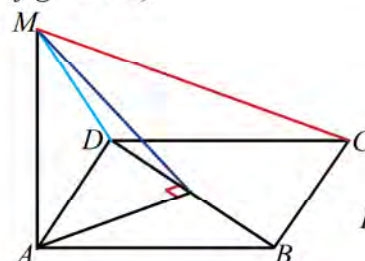


Figura 152

LECȚIA 18

Calculul distanței de la un punct la un plan

Calculul distanței dintre două plane paralele



Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare

Teoremă*(Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare)*

Considerăm un plan α , un punct M exterior planului și o dreaptă d inclusă în plan. Dacă O este proiecția lui M pe α și $O \notin d$, iar A este proiecția lui M pe d , atunci A este proiecția lui O pe d .

Ipoteză	Concluzie
$MO \perp \alpha, O \in \alpha$ $O \notin d, d \subset \alpha$ $MA \perp d, A \in d$	$OA \perp d$

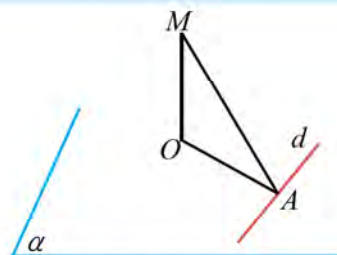


Figura 153

Demonstrație

Din faptul că $MO \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$, rezultă că $MO \perp d$ (vezi figura 153). Dreapta d este perpendiculară pe dreptele MO și MA , prin urmare este perpendiculară pe planul (MOA) determinat de aceste drepte. Cum $OA \subset (MOA)$, rezultă că d este perpendiculară pe dreapta OA .

Observații

1. Enunțul primei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare poate fi exprimat și astfel: „Dacă un unghi drept are o latură inclusă într-un plan dat, iar cealaltă latură este oblică, atunci proiecția unghiului pe acest plan este un unghi drept”.
2. Dreapta OA din teoremă este perpendiculară atât pe MO , cât și pe d . Spunem că OA este perpendiculara comună a dreptelor MO și d .

**Investigație****Temă****Recomandată pentru lucru în echipe**

1. Un brad de crăciun cu vârful V este ancorat prin trei cabluri întinse AV , BV și CV care formează cu planul solului unghiuri de 60° . Știind că punctele A , B , C sunt vârfurile unui triunghi echilateral cu latura de 15 m, calculează valoarea aproximativă a înălțimii bradului.
2. Fiind dat un tetraedru din lemn, apreciază pe una dintre baze proiecția vârfului ce nu aparține bazei. Găsește un procedeu prin care, trasând linii pe suprafața tetraedrului, să determini proiecția unui vârf pe fața opusă. Compară soluția corectă cu cea intuită de tine (vezi figura 154).



Figura 154



Calculul distanței de la un punct la un plan

Distanța de la un punct la un plan este distanța dintre punct și proiecția lui pe plan. O modalitate de construcție a proiecției punctului pe plan este dată de următoarea teoremă:

Teoremă

(A doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare)

Considerăm un plan α , un punct M exterior planului și o dreaptă d inclusă în plan. Dacă A este proiecția punctului M pe dreapta d , iar punctul $O \in \alpha$, astfel încât $OA \perp d$ și $MO \perp OA$, atunci $MO \perp \alpha$.

Ipoteză	Concluzie
$d \subset \alpha$ $MA \perp d, A \in d$ $b \subset \alpha, b \perp d, A \in b$ $MO \perp b, O \in b$	$MO \perp \alpha$

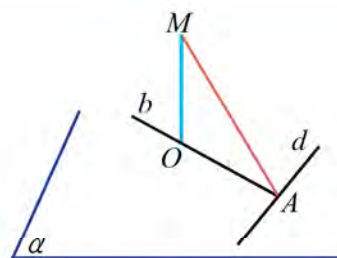


Figura 155

Demonstrație

Dreapta d este perpendiculară pe dreapta OA și MA , prin urmare este perpendiculară pe planul (MOA) . Dreapta MO fiind conținută în acest plan, rezultă $d \perp MO$. Din $MO \perp b$ și $MO \perp d$, rezultă că $MO \perp \alpha$. Din teoremă deducem un procedeu pentru construcția perpendiculară dintr-un punct pe un plan.

Algoritm pentru construcția perpendiculară din punctul M pe planul α :

- Construim proiecția punctului M pe o dreaptă d inclusă în planul α . Notăm această proiecție cu A .
- Construim în planul α dreapta b care este perpendiculară pe dreapta d în punctul A .
- Construim proiecția O a punctului M pe dreapta b .
- Rezultă că $MO \perp \alpha$, deci distanța de la punctul M la planul α , notată $d(M, \alpha)$ este MO .



Problemă rezolvată

Pătratul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și triunghiul echilateral MAD sunt situate în plane diferite. Știind că $\angle MAB = 90^\circ$, calculează:

- a) $d(M, (ABC))$; b) $d(A, (MBC))$.

Soluție a) Deoarece $MA \perp AB$, $DA \perp AB$, construim $MM' \perp AD$ și, conform reciprocei a doua a teoremei celor trei perpendiculare, vom avea $d(M, (ABC)) = MM'$. Cum MM' este înălțime în triunghiul echilateral MAD , avem $MM' = 5\sqrt{3}$ cm.

b) Deoarece $AD \parallel BC$ și $BC \subset (MBC)$, rezultă că $AD \parallel (MBC)$, deci $d(A, (MBC)) = d(M', (MBC))$. Fie R mijlocul lui BC . Deoarece $BC \perp M'R$, $BC \perp MM'$, $M'R, MM' \subset (MM'R)$, rezultă că $BC \perp (MM'R)$.

Cum $BC \subset (MBC)$, rezultă că $(MBC) \perp (MM'R)$. Cum $(MBC) \cap (MM'R) = MR$, rezultă că $d(M', (MBC)) = M'S$, unde $M'S \perp MR$, $S \in MR$. Din triunghiul $MM'R$, dreptunghic în M' avem:

$$M'S = \frac{MM' \cdot M'R}{MR} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 10}{5\sqrt{7}} = \frac{10\sqrt{21}}{7} \text{ cm.}$$

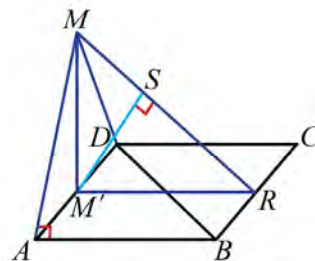


Figura 156




Calculul distanței dintre două plane paralele

Distanța dintre două plane paralele este distanța de la un punct al unui plan la celălalt plan.

În figura 157, planele α și β sunt paralele, $M \in \alpha$, $MN \perp \beta$ și $N \in \beta$.

Distanța dintre planele α și β este lungimea segmentului MN și notăm $d(\alpha, \beta) = MN$.

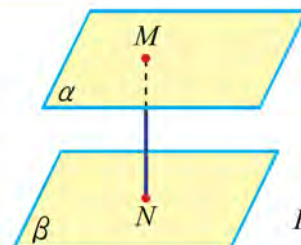


Figura 157


Problemă rezolvată

Se consideră $SABC$ o piramidă cu baza ABC triunghi echilateral cu latura de 10 cm și $SA = SB = SC = 5\sqrt{2}$ cm.

a) Arată că triunghiul ASB este dreptunghic. b) Calculează $d(A, (SBC))$.

c) Construiește prin M , mijlocul lui SA , un plan paralel cu planul (ABC) și calculează distanța dintre cele două plane paralele.

Soluție a) Din $SA^2 + SB^2 = AB^2$, rezultă cu reciproca teoremei lui Pitagora că $SA \perp SB$.

b) Analog ca la punctul a), $SA \perp SC$; rezultă $SA \perp (SBC)$, deci $d(A, (SBC)) = AS = 5\sqrt{2}$ cm.

c) Planul este (MNP) , N este mijlocul lui SB și P este mijlocul segmentului SC . Construim $ST \perp BC$, T este mijlocul segmentului BC , de unde rezultă că $AT \perp BC$. Construim $SO \perp AT$ și rezultă $d(S, (ABC)) = SO$.

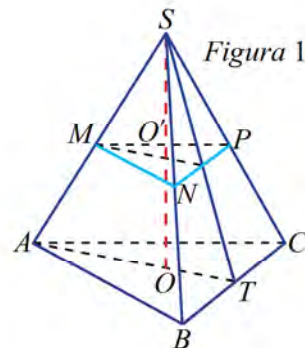


Figura 158

Din faptul că $AS \perp (SBC)$ rezultă $AS \perp ST$, deci $SO = \frac{AS \cdot ST}{AT} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$ cm. Dacă $SO \cap (MNP) = \{O'\}$, rezultă că $d((MNP), (ABC)) = OO' = \frac{1}{2}SO = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ cm.


FIXARE
EXERSARE
CONSOLIDARE
PROBLEME


1 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $AB = 15$ cm, $AC = 2$ dm, se ridică perpendiculara AP , $AP = 12\sqrt{3}$ cm. Calculează $d(A, (PBC))$.

2 În figura 159, $ABCD$ este un dreptunghi și $AM \perp (ABC)$. Calculează $d(A, (MBC))$, $d(M, (ABC))$, $d(A, (MDC))$.

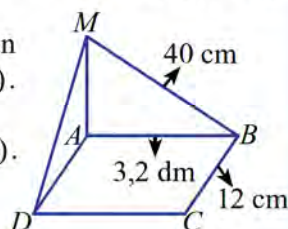


Figura 159

3 Pe planul triunghiului isoscel ABC cu $AB = AC = 25$ cm și $BC = 30$ cm, se ridică perpendiculara în A pe care se ia punctul D , astfel încât $AD = 10$ cm. Calculează $d(D, BC)$ și $d(A, (DBC))$.

4 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 12$ cm. Calculează: a) $d(A, (BDD'))$; b) $d(B, (B' A' C'))$.

5 Se consideră $ABCDEFGH$ o prismă dreaptă cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 6$ cm, iar $\angle(AG, (ABC)) = 60^\circ$. Calculează: a) $d(B, (ACG))$; b) $d(D, (ACH))$.

6 Pe planul dreptunghiului $ABCD$, în care $AB = 12$ cm și $AC = 13$ cm, se ridică perpendiculara AM , $AM = 20$ cm. Calculează: a) $d(A, (BDM))$; b) $d(A, (CDM))$.

7 Pe planul trapezului isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, cu $AB = 12$ cm, $AD = BC = CD = 6$ cm, se ridică perpendiculara AE cu $AE = 6$ cm. Calculează: a) $d(A, (EBC))$; b) $d(A, (EDC))$.

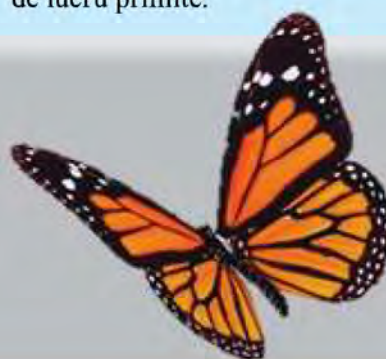


PROIECT**Simetria față de un plan****PLANUL PROIECTULUI****REALIZAREA PROIECTULUI:**

- Împărțiți clasa în două echipe de elevi.
- Membrii fiecărei echipe vor realiza pe coli A4, respectiv pe planșe, sarcinile de lucru primite.

MATERIALE NECESARE:

- Calculator, tabletă, altă sursă.
- Coli de hârtie A4, planșe de carton, carioci, creioane colorate.

**Prezentare generală**

Definim simetricul unui punct A în raport cu un plan α astfel:

- dacă $A \notin \alpha$, simetricul lui A este punctul A' cu proprietatea că planul α conține mijlocul segmentului AA' și este perpendicular pe dreapta AA' ;
- dacă $A \in \alpha$, atunci simetricul lui A este A .

SARCINI DE LUCRU:

Folosind articole, idei, comentarii de pe internet, puneți în evidență:

- studiul unor proprietăți ale simetriei față de plan prin analogie cu simetria față de o dreaptă într-un plan;
- exemple de corpuri geometrice și corpuri din realitatea înconjurătoare care au un plan de simetrie sau mai multe; (folosiți desene, fotografii, corpuri geometrice din carton realizate de voi).



TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 În cubul $ABCDEFGH$, proiecția segmentului EC pe planul (ABC) este segmentul . . .
- 5p 2 Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara PA . Dacă $AB = PA = a, a > 0$, tangenta unghiului format de planele (ABC) și (PBD) este egală cu . . .
- 5p 3 Un segment MN se proiectează pe planul α după segmentul $M'N'$. Dacă $MN = 6$ cm și $\angle(MN, \alpha) = 60^\circ$, atunci lungimea segmentului $M'N'$ este egală cu . . .
- 5p 4 Prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ are muchia bazei $AB = 4$ cm. Lungimea proiecției segmentului BC pe planul $(A_1B_1C_1)$ este egală cu . . . cm.
- 5p 5 Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are vârful V și $VA = AB$. Măsura unghiului format de dreapta VA cu planul (ABC) este de . . .°
- 5p 6 Pe planul dreptunghiului $ABCD$, având $AB = \sqrt{2}$ cm, se ridică perpendiculara MA , $MA = \sqrt{6}$ cm. Unghiul dintre planele (ABC) și (MBC) are măsura de . . .°

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Se consideră planul α și punctele $A, B, C \in \alpha, P \notin \alpha$, astfel încât $PA \perp \alpha, AB \perp BC, PA = 12$ cm, $AB = 5$ cm. Distanța de la punctul P la dreapta BC este egală cu:
 A. 15 cm B. 13 cm C. 12 cm D. 20 cm
- 5p 2 Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ are $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 12$ cm. Distanța de la punctul A' la dreapta BD este egală cu:
 A. $12\sqrt{5}$ cm B. $12\sqrt{26}$ cm C. $\frac{12\sqrt{26}}{5}$ cm D. $\frac{\sqrt{26}}{5}$ cm
- 5p 3 Piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful V , are $VA = 8$ cm, iar măsura unghiului dintre muchia laterală și planul bazei este egală cu 60° . Înălțimea VO a piramidei are lungimea de:
 A. $4\sqrt{3}$ cm B. $4\sqrt{2}$ cm C. 4 cm D. $4\sqrt{5}$ cm
- 5p 4 Se consideră $ABCD$ un paralelogram și α un plan ce conține diagonala AC a paralelogramului. Dacă B' și D' sunt proiecțiile punctelor B , respectiv D , pe planul α și $BB' = 5$ cm, atunci lungimea segmentului DD' este egală cu:
 A. 2,5 cm B. 10 cm C. $5\sqrt{2}$ cm D. 5 cm
- 5p 5 Într-un tetraedru regulat, cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei are valoarea:
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{6}}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 5p 6 În cubul $POLIEDRU$, notăm cu A centrul feței $OLRD$. Tangenta unghiului format de dreapta PA cu planul (ORL) are valoarea:
 A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un cub, $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 4$ cm.

- 10p a) Calculează lungimea proiecției segmentului $D'O$ pe planul $(A' B' C')$.
- 10p b) Demonstrează că planele $(AD'O)$ și (BDD') sunt perpendiculare.
- 10p c) O furnică străbate distanța dintre punctele A și D' , pe drumul minim situat pe suprafața laterală a cubului. Știind că drumul parcurs de furnică intersectează muchiile BB' și CC' , arată că lungimea acestui drum este mai mică de 13 cm.



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 90 min.

SUBIECTUL I. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera **A**, în caz contrar, încercuiește litera **F** (20 de puncte).

- 5p 1 Diagonala unui cub cu muchia de 4 cm are lungimea egală cu $4\sqrt{2}$ cm.
A **F**
- 5p 2 În cubul $ABCDEFGH$, proiecția segmentului CH pe planul (ABC) este segmentul CD .
A **F**
- 5p 3 Pe planul triunghiului echilateral ABC , cu $AB = 4$ cm, se ridică perpendiculara AP , $AP = 2$ cm. Distanța de la punctul P la dreapta BC este egală cu 4 cm.
A **F**
- 5p 4 În piramida triunghiulară regulată $SABC$, punctul O este centrul cercului circumscris bazei ABC . Dacă $AB = 24$ cm și $SO = 12$ cm, atunci unghiul dintre planele (ABC) și (SBC) are măsura de 60° .
A **F**

SUBIECTUL al II-lea. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect din coloana **B** (20 de puncte).

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 2\sqrt{5}$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 6$ cm. Notăm $AC \cap BD = \{O\}$.

- A**
- 5p 1 Diagonala paralelipipedului $ABCD A' B' C' D'$ are lungimea egală cu ... cm.
- 5p 2 Tangenta unghiului dintre dreapta $A'O$ și planul (ABC) este egală cu ...
- 5p 3 Sinusul unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) este egal cu ...
- 5p 4 Distanța de la punctul A la planul (BDD') este egală cu ... cm.

- B**
- a. 2
- b. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$
- c. $\frac{1}{2}$
- d. $6\sqrt{2}$
- e. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

- 1 Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful V , latura bazei $AB = 6\sqrt{3}$ cm și muchia laterală $VA = 6\sqrt{6}$ cm.
- 10p a) Calculează măsura unghiului dintre dreapta VD și planul (ABC) .
- 10p b) Calculează distanța de la punctul A la planul (VBC) (vezi figura 160).
- 2 Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC = 2\sqrt{6}$ cm și $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Dreapta MB este perpendiculară pe planul (ABC) , $MB = 2$ cm. (Vezi figura 161).
- 10p a) Calculează distanța de la punctul M la dreapta AC .
- 10p b) Calculează distanța de la punctul B la planul (ACM) .
- 10p c) Calculează tangenta unghiului dintre planele (MAC) și (MAB) .

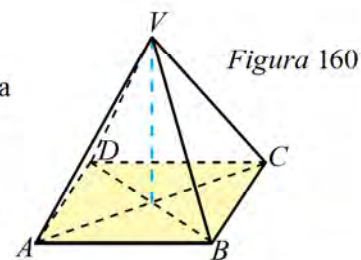


Figura 160

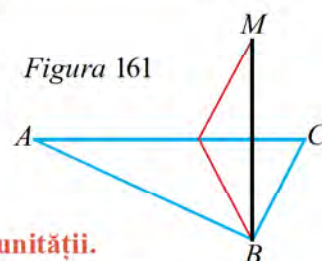


Figura 161

Descarcă din manualul digital, apoi completează fișa de observare a unității.

5

ARI ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

UNITATEA

LECȚIA 1

Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate (determinare prin calcul)



Descrierea piramidei regulate



Elementele piramidei regulate

Reamintim că o piramidă se numește *piramidă regulată* dacă baza ei este un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt congruente. Am demonstrat anterior o condiție necesară și suficientă ca o piramidă să fie regulată.

REȚINE!

O piramidă este regulată dacă și numai dacă baza sa este un poligon regulat, iar proiecția vârfului pe planul bazei reprezintă centrul cercului circumscris poligonului bazei.

De aici rezultă un procedeu de a reprezenta prin desen o piramidă regulată:

- desenăm în plan orizontal poligonul regulat ce reprezintă baza piramidei;
- în centrul cercului circumscris poligonului, ridicăm o perpendiculară pe planul poligonului și pe această perpendiculară fixăm vârful piramidei;
- unind acest vârf cu vârfurile poligonului bazei, obținem muchiile laterale ale piramidei.

În *figurile 1, 2, 3* am reprezentat o piramidă triunghiulară regulată, o piramidă patrulateră regulată și o piramidă hexagonală regulată.

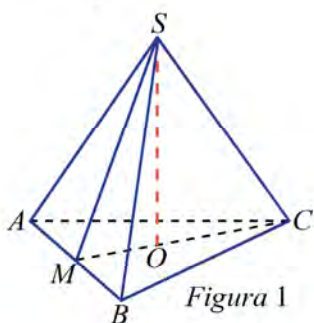


Figura 1

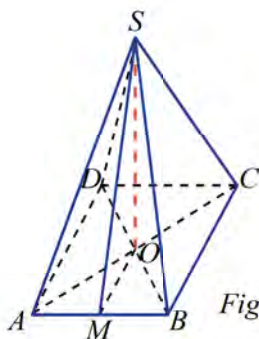


Figura 2

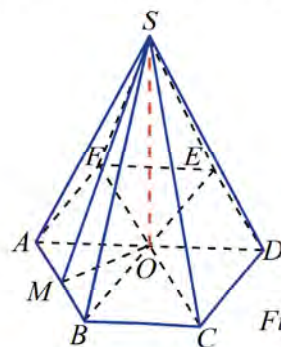


Figura 3

Definiție

Se numește *apotemă* a unei piramide regulate, înălțimea unei fețe laterale, dusă din vârful piramidei.

În fiecare din *figurile 1, 2 și 3* s-a construit apotema notată SM .

Notăm cu a_p , apotema piramidei, cu a_b , apotema bazei și cu h înălțimea. Fie M mijlocul laturii AB într-o piramidă regulată cu vârful în S . Notăm cu O centrul cercului circumscris poligonului bazei.

Aplicând teorema lui *Pitagora* în triunghiul dreptunghic SOM , avem $SO^2 + OM^2 = SM^2$, adică:

$$h^2 + a_b^2 = a_p^2$$

De exemplu, pentru un tetraedru regulat de muchie l , avem $a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ și $a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6}$, și obținem $h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$.



Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate (cu baza triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat)

În figura 4, $VABC$ reprezintă o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC , iar punctele M, N, P sunt, respectiv, mijloacele segmentelor BC, AB și AC .

1. Distanțe pe fețele sau în interiorul piramidei triunghiulare regulate

- Distanța de la centrul bazei la o muchie laterală se calculează ca înălțime într-un triunghi dreptunghic.
- Astfel, distanța de la punctul O la muchia VA este lungimea înălțimii din O a triunghiului dreptunghic VOA și este egală cu $\frac{VO \cdot AO}{VA}$. Precizează cum se calculează distanța de la punctul O la muchia VC și distanța de la punctul O la muchia VB .
- Deoarece $VM \perp BC$, $OM \perp BC$ și $BC \subset (VBC)$, rezultă că $(VOM) \perp (VBC)$ și deci distanța de la punctul O la planul (VBC) este lungimea perpendicularei din punctul O pe apotema VM și este egală cu $\frac{VO \cdot OM}{VM}$. Spune cum se calculează distanța de la punctul O la planul (VAB) și distanța de la punctul O la planul (VAC) .
- Deoarece $(VAM) \perp (VBC)$, rezultă că distanța de la punctul A la planul (VBC) este distanța de la punctul A la apotema VM , care se calculează de obicei exprimând aria triunghiului VAM în două moduri, și anume: $\frac{VO \cdot AM}{2} = \frac{d(A; VM) \cdot VM}{2}$. Precizează formulele din care obținem distanțele de la punctul B la planul (VAC) și de la punctul C la planul (VAB) .

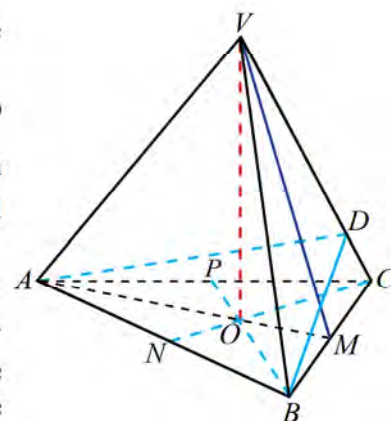


Figura 4

2. Unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei triunghiulare regulate

- În orice piramidă triunghiulară regulată, muchiile opuse sunt perpendiculare: $VA \perp BC$, $VB \perp AC$ și $VC \perp AB$. ($BC \perp (VAM)$ și $VA \subset (VAM)$, rezultă $BC \perp VA$). Demonstrează că $VB \perp AC$.
- Deoarece $\triangle VBC \equiv \triangle VAC$, dacă ducem $BD \perp VC$, atunci și $AD \perp VC$, deci unghiul dintre planele fețelor VBC și VAC este unghiul dintre dreptele BD și AD . Precizează și pentru celelalte situații cum se calculează unghiul dintre două fețe laterale alăturate în piramida $VABC$.
- Proiecțiile muchiilor laterale VA, VB, VC pe planul bazei (ABC) sunt, respectiv, segmentele AO, BO și CO . Deci, unghiurile dintre muchiile laterale și planul bazei sunt $\widehat{VAO}$, $\widehat{VBO}$ și $\widehat{VCO}$.
- Deoarece $VM \perp BC$ și $OM \perp BC$, rezultă că unghiul dintre planul feței laterale VBC și planul bazei este unghiul VMO . Precizează unghiul dintre planele (VAB) și (ABC) .

În figura 5, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea VO și apotema VM .

3. Distanțe pe fețele sau în interiorul piramidei patrulatere regulate

- Distanța de la centrul bazei la o muchie laterală, de exemplu de la O la VA , este înălțimea din O a triunghiului dreptunghic VOA și este egală cu $\frac{VO \cdot OA}{VA}$.
- Distanța de la centrul bazei la o față laterală, de exemplu de la O la (VBC) , este distanța de la O la VM (deoarece $(VOM) \perp (VBC)$) și este egală cu $\frac{VO \cdot OM}{VM}$.
- Distanța de la punctul A la planul (VBC) este dublul distanței de la punctul O la planul (VBC) , deoarece O este mijlocul segmentului AC și $C \in (VBC)$.

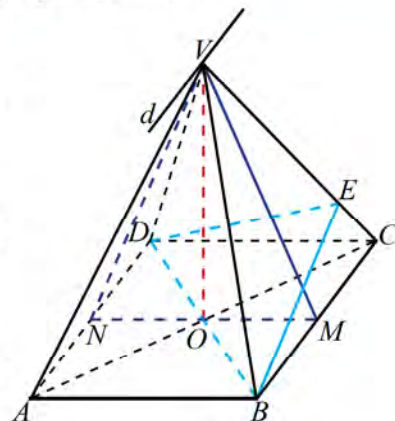


Figura 5

4. Unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei patrulatere regulate

- Proiecțiile muchiilor laterale VA , VB , VC și VD pe planul bazei sunt, respectiv, segmentele OA , OB , OC și OD . Deci unghiurile dintre muchiile laterale și planul bazei sunt: $\widehat{VAO}$, $\widehat{VBO}$, $\widehat{VCO}$ și $\widehat{VDO}$.
- Deoarece $VM \perp BC$ și $OM \perp BC$, rezultă că unghiul dintre planul feței laterale VBC și planul bazei este unghiul VMO . Construiește unghiul dintre (VAB) și (ABC) .
- Spunem despre fețele VAD și VBC că sunt fețe opuse.
- Din $BC \parallel AD$, $BC \subset (VBC)$, $AD \subset (VAD)$ și V este punct comun, rezultă că dreapta de intersecție a planelor (VAD) și (VBC) trece prin V și este paralelă cu BC . Ducem $VN \perp AD$ și fie $d = (VAD) \cap (VBC)$, rezultă $VM \perp d$ și $VN \perp d$. Deci unghiul dintre planele (VBC) și (VAD) este unghiul dintre dreptele VM și VN . Construiește și unghiul dintre celelalte fețe opuse.
- Dacă $BE \perp VC$, atunci și $DE \perp VC$, deci unghiul dintre fețele laterale (VBC) și (VDC) este unghiul dintre BE și DE .
- Unghiul dintre VA și BC este unghiul dintre VA și AD ($AD \parallel BC$), adică $\angle VAD$.



Probleme rezolvate

- 1 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 18$ cm, $VA = 12$ cm, O este centrul bazei și $N \in VA$, $VN = 4$ cm.

- Calculează lungimile segmentelor VO și VM .
- Calculează măsura unghiului dintre VA și (ABC) .
- Arată că $NO \parallel (VBC)$.
- Calculează distanța de la punctul N la planul (ABC) .
- Calculează tangenta unghiului dintre MN și (ABC) .
- Calculează distanța de la punctul A la planul (VBC) .
- Calculează sinusul unghiului dintre VA și (VBC) .
- Calculează cosinusul unghiului dintre VM și AC .

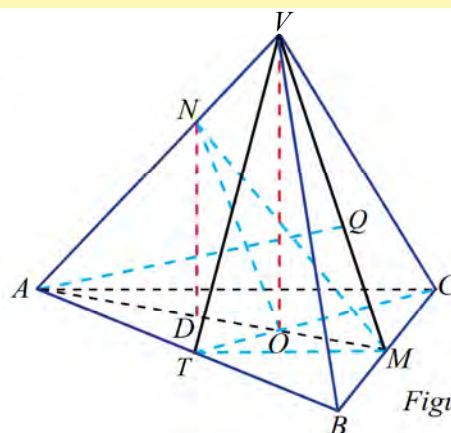


Figura 6

Soluție a) $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{18\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. $\triangle VOA$ dreptunghic în O ; $VO^2 = VA^2 - AO^2$, rezultă $VO = 6$ cm.

$\triangle VMB$ este dreptunghic în M , rezultă $VM^2 = VB^2 - BM^2$, rezultă $VM = 3\sqrt{7}$ cm.

b) $\angle[VA; (ABC)] = \angle(VA; AO) = \angle VAO = 30^\circ \left(VO = \frac{VA}{2} \right)$. c) $\frac{VN}{VA} = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3}$. Rezultă, conform reciprocei teoremei lui Thales, că $NO \parallel VM$; $VM \subset (VBC)$ și $NO \not\subset (VBC)$, rezultă $NO \parallel (VBC)$.

d) Ducem $ND \parallel VO$, $D \in AO$, și cum $VO \perp (ABC)$, rezultă $ND \perp (ABC)$. În $\triangle VAO$, $ND \parallel VO$, rezultă conform teoremei fundamentale a asemănării că $\triangle AND \sim \triangle AVO$, rezultă $\frac{ND}{VO} = \frac{AN}{AV} = \frac{AD}{AO}$, rezultă $ND = 4$ cm și $AD = 4\sqrt{3}$ cm. e) Proiecția lui MN pe (ABC) este MD . Deci unghiul dintre MN și (ABC) este $\angle NMD$. $\tan \angle NMD = \frac{ND}{DM} = \frac{4\sqrt{3}}{15}$. f) Din $AM \perp BC$, $VM \perp BC$ și $BC \subset (VBC)$, rezultă $(VAM) \perp (VBC)$, rezultă $d[A; (VBC)] = d(A; VM) = AQ$. $\mathcal{A}_{\triangle VAM} = \frac{AM \cdot VO}{2} = 27\sqrt{3}$ cm². $\mathcal{A}_{\triangle VAM} = \frac{VM \cdot AQ}{2} = \frac{3\sqrt{7} \cdot AQ}{2}$. Deci $\frac{3\sqrt{7} \cdot AQ}{2} = 27\sqrt{3}$, rezultă $AQ = \frac{18\sqrt{21}}{7}$ cm. g) Din $AQ \perp (VBC)$, rezultă proiecția lui VA pe (VBC) este VQ și unghiul dintre VA și (VBC) este $\angle AVQ$. $\sin \angle AVQ = \frac{AQ}{AV} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$. h) Fie T mijlocul muchiei AB . MT este linie mijlocie în $\triangle ABC$, rezultă $MT \parallel AC$, rezultă $\angle(VM; AC) = \angle(VM; MT) = \angle VMT$. Deducem $VE \perp MT$, rezultă $ME = ET = \frac{MT}{2} = \frac{9}{2}$ cm. $\cos \widehat{VME} = \frac{ME}{VM} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$.

2 Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , $AB = 10$ cm și $VA = 10\sqrt{5}$ cm (vezi figura 7).

a) Calculează tangenta unghiului dintre planele (VAC) și (VBC) .

b) Calculează sinusul unghiului dintre planele (VBC) și (VDC) .

Soluție a) $(VAC) \cap (VBC) = VC$. Construim $OP \perp VC$, $P \in VC$. Deoarece $BO \perp (VAC)$, $OP \perp VC$, $OP, VC \subset (VOC)$ rezultă, cu teorema celor trei perpendiculare, că $BP \perp VC$. Obținem $((VBC), (VAC)) = \widehat{OPB}$; $\widehat{BP} = \widehat{OPB}$.

Din triunghiul BOP , dreptunghic în O , obținem: $\tan \widehat{OPB} = \frac{OB}{OP}$. $OB = 5\sqrt{2}$ cm, $OP = \frac{VO \cdot OC}{VC} = 3\sqrt{5}$ cm, $\tan \widehat{OPB} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

b) La fel ca la punctul a), deducem $DP \perp VC$. Deoarece $(VBC) \cap (VDC) = VC$, avem $\angle((VBC), (VDC)) = \angle BPD$. În $\triangle BPD$ isoscel, avem $BP = DP = \sqrt{BO^2 + PO^2} = \sqrt{95}$ cm. Exprimând aria triunghiului DPB în două moduri, obținem $\frac{OP \cdot BD}{2} = \frac{DP \cdot BB_1}{2}$, unde $BB_1 \perp DP$, $B_1 \in DP$.

Deci, $BB_1 = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$ cm. Obținem

$$\sin((VBC), (VDC)) = \sin \widehat{BPB_1} = \frac{BB_1}{BP} = \frac{6\sqrt{10}}{19}.$$

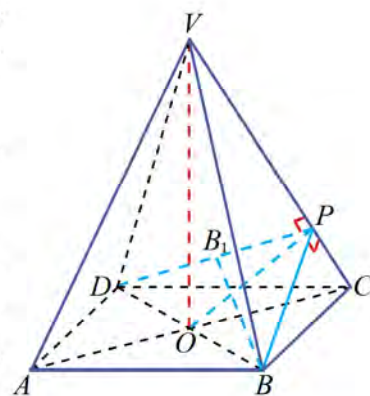


Figura 7

3 $VABCDEF$ este o piramidă hexagonală regulată cu înălțimea $VO = 12$ cm, $VA = 8\sqrt{3}$ cm și VM este apotema piramidei (vezi figura 8). Calculează:

a) lungimile segmentelor AB și VM ;

b) măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei;

c) sinusul unghiului dintre planul unei fețe laterale și planul bazei;

d) distanța de la punctul O la planul (VAB) ;

e) distanța de la punctul B la planul (VAD) ;

f) sinusul unghiului dintre planele (VAB) și (VDE) .

Soluție a) $\triangle VOA$ este dreptunghic în O , rezultă $AO^2 = VA^2 - VO^2$, rezultă $AO = 4\sqrt{3}$, rezultă $AB = 4\sqrt{3}$ cm. $\triangle VMA$ este dreptunghic în M , rezultă $VM^2 = VA^2 - AM^2$, rezultă $VM = 6\sqrt{5}$ cm.

b) $\angle(VA; (ABC)) = \angle(VA; AO) = \angle VAO = 60^\circ$ ($AO = \frac{VA}{2}$).

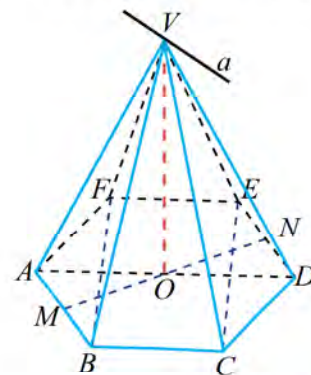


Figura 8

c) $VM \perp AB$, $VM \subset (VAB)$, $OM \perp AB$, $OM \subset (ABC)$, rezultă $\angle((VAB); (ABC)) = \angle(VM; OM) = \angle VMO$.

$$\sin \widehat{VMO} = \frac{VO}{VM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

d) $OM \perp AB$, $VM \perp AB$ și $AB \subset (VAB)$, rezultă $(VOM) \perp (VAB)$, rezultă

$$d(O; (VAB)) = d(O; VM) = \frac{VO \cdot OM}{VM} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}$$

e) $VO \subset (VAD)$ și $VO \perp (ABC)$, rezultă $(VAD) \perp (ABC)$,

$$\text{rezultă } d(B; (VAD)) = d(B; AD) = \frac{BF}{2} = 6 \text{ cm.}$$

f) Din $AB \parallel DE$, $AB \subset (VAB)$, $DE \subset (VDE)$ și V este

punct comun, rezultă că dreapta de intersecție a planelor (VAB) și (VDE) trece prin V și este paralelă cu AB .

Fie $\{N\} = MO \cap DE$ și $a = (VAB) \cap (VDE)$. Din $VM \perp AB$, $VN \perp DE$ și $a \parallel AB \parallel DE$, rezultă $VM \perp d$ și $VN \perp d$. Deci unghiul dintre (VAB) și (VDE) este unghiul dintre VM și VN , adică $\angle MVN$.

$$A_{\Delta MVN} = \frac{MN \cdot VO}{2} = 72 \text{ cm}^2; A_{\Delta MVN} = \frac{VM \cdot VN \sin \widehat{MVN}}{2} = 90 \sin \widehat{MVN}. \text{ Se obține } \sin \widehat{MVN} = 0,8.$$



FIXARE



EXERSARE



CONSOLIDARE

PROBLEME



- $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, O este centrul bazei $ABCD$, M este mijlocul muchiei BC , iar N este mijlocul muchiei VC . Se știe că $AB = 12 \text{ cm}$ și aria triunghiului VBC este egală cu aria bazei. Calculează:
 - lungimile segmentelor VO și VM ;
 - tangenta unghiului dintre dreptele NO și BC ;
 - distanța de la punctul O la planul (VBC) ;
 - distanța de la punctul N la planul (VBD) ;
 - tangenta unghiului dintre dreapta MN și (VAC) .
- $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, O este centrul bazei ABC , D este mijlocul muchiei BC și E este mijlocul muchiei AB . Dacă $AB = 12 \text{ cm}$ și $VA = 8 \text{ cm}$, se cere:
 - să calculezi lungimile segmentelor VO și VD ;
 - să arăți că $DE \parallel (VAC)$;
 - unghiul dintre VA și BC ;
 - tangenta unghiului dintre VD și AC ;
 - distanța de la punctul A la planul (VBC) .
- Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ cu vârful V are înălțimea $VO = 6 \text{ cm}$ și $AB = 12 \text{ cm}$. Calculează:
 - lungimea apotemei piramidei;
 - distanța de la punctul A la planul (VCF) ;
 - sinusul unghiului dintre dreptele VA și VD ;
 - măsura unghiului dintre planele (VBC) și (VEF) .
- Piramida triunghiulară regulată $ABCD$ are baza ABC cu $AB = 6 \text{ cm}$ și $AD = 5 \text{ cm}$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv AD .
 - Calculează înălțimea și apotema piramidei.
 - Calculează sinusul unghiului dintre dreapta MN și dreapta DC .
 - Calculează lungimea proiecției segmentului MN pe planul (ABC) .
- Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are lungimea înălțimii VO egală cu lungimea laturii BC a pătratului $ABCD$ și M este mijlocul laturii BC . Dacă $VM = 4\sqrt{5} \text{ cm}$, calculează:
 - înălțimea VO ;
 - distanța de la punctul O la planul (VBC) ;
 - distanța de la punctul O la dreapta VB .
- O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V are $AB = VO = 10 \text{ cm}$, unde $AC \cap BD = \{O\}$. Calculează:
 - apotema piramidei;
 - distanța de la punctul A la planul (VBC) ;
 - distanța de la mijlocul lui VA la planul (VBC) .
- Piramida patrulateră regulată $VABCD$, de vârf V are aria laterală egală cu 288 cm^2 și unghiul dintre planele (VBC) și (VAD) are măsura de 60° . Calculează:
 - măsura unghiului dintre planele (VBC) și (ABC) ;
 - înălțimea piramidei;
 - valoarea tangentei unghiului format de muchia laterală cu planul bazei;
 - distanța de la mijlocul înălțimii VO la planul (VBC) .

LECTIA 2

Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prisme drepte (determinare prin calcul)

Descrierea
prisme drepteElementele
prisme drepteTipuri de
prismă dreaptă

Să ne amintim câteva definiții și proprietăți ale prisme drepte studiate de-a lungul capitolelor anterioare.

- Prisma dreaptă este un poliedru mărginit de două suprafețe poligonale, numite bazele prisme și fețele laterale, care sunt suprafețe dreptunghiulare.
- Poligoanele ce formează bazele prisme sunt congruente, având laturile respectiv paralele, situate în plane paralele.
- Din criteriul de perpendicularitate rezultă că o prismă este dreaptă dacă și numai dacă muchiile laterale sunt perpendiculare pe planul bazei.

Fețele laterale ale prisme drepte sunt *perpendiculare* pe planul bazei.

- Înălțimea unei prisme este distanța dintre planele bazelor. Cum în cazul prisme drepte, muchia laterală este perpendiculară pe planele bazelor, rezultă că înălțimea este egală cu lungimea muchiei laterale.

REȚINE!

O prismă este dreaptă dacă și numai dacă muchiile laterale sunt perpendiculare pe planul bazei. Dacă, în plus, poligoanele bazelor sunt regulate, atunci prisma este regulată.

În figurile 9, 10, 11 am reprezentatisme drepte având ca baze poligoane regulate cu 3, 4 și 6 laturi; în figura 12 am reprezentat un paralelipiped dreptunghic (adică o prismă dreaptă cu baze dreptunghiulare), iar în figura 13, un cub (adică un paralelipiped dreptunghic cu toate muchiile congruente).

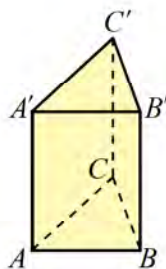


Figura 9

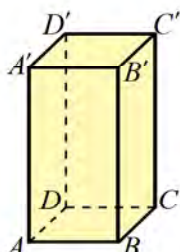


Figura 10

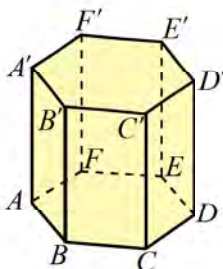


Figura 11

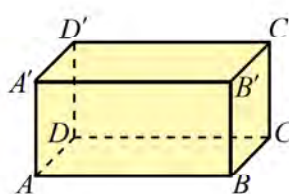


Figura 12

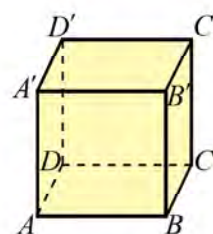


Figura 13

Pentru prisma din figura 9, bazele sunt triunghiurile echilaterale congruente ABC și $A'B'C'$, cu $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$. Fețele laterale sunt dreptunghiurile $ABB'A'$, $ACC'A'$ și $BCC'B'$. Muchiile laterale sunt AA' , BB' și CC' . Avem $AA' \perp (ABC)$, $BB' \perp (ABC)$, $CC' \perp (ABC)$, $(ABB'A') \perp (ABC)$ etc. Înălțimea prisme este $h = AA'$.

Prisma are 5 fețe (trei fețe laterale la care se adaugă două baze), 9 muchii (3 muchii laterale la care se adaugă muchiile celor două baze) și 6 vârfuri.

Temă

recomandată pentru lucru în echipă

Describe în mod asemănător prisme din figurile 10, 11, 12, 13, punând în evidență elementele lor.



Se consideră $ABCD A' B' C' D'$, un paralelipiped dreptunghic. Segmentele AC' , $A'C$, BD' și $B'D$ sunt diagonalele paralelipipedului. Acestea sunt congruente și se intersectează într-un punct care este mijlocul fiecărei diagonale (vezi figura 14).

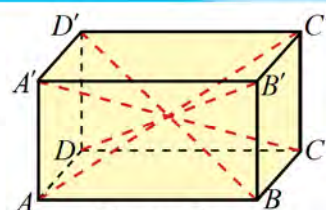


Figura 14

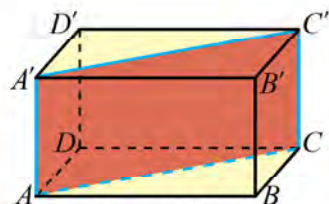


Figura 15

Dacă secționăm un paralelipiped cu un plan determinat de două muchii paralele care nu aparțin aceleiași fețe, secțiunea obținută se numește *secțiune diagonală*.

Astfel, în paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, planul dreptelor AA' și CC' determină secțiunea diagonală $ACC' A'$ care este un dreptunghi (vezi figura 15).

⇒ Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prisme

- În figura 16, $ABCA' B' C'$ este o prismă dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale.
 - Proiecțiile punctelor A' , B' , C' pe planul (ABC) sunt, respectiv punctele A , B și C .
 - Deoarece muchiile laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor, rezultă că planele fețelor laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor.
 $(ABA') \perp (ABC)$, $(ABA') \perp (A' B' C')$, ...
 - Deoarece $(BCB') \perp (ABC)$, rezultă că distanța de la A la (BCB') este egală cu distanța de la A la BC , adică este lungimea înălțimii din punctul A a triunghiului echilateral ABC . Avem: $d(A, (BCC')) = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.
 - Deoarece $AA' \perp (ABC)$, rezultă că unghiul dintre dreptele AA' și BC este de 90° .
 - Unghiul dintre două fețe laterale este unghiul dintre două muchii ale unei baze care sunt incluse, respectiv, în cele două fețe laterale. Avem: $\angle((ABB'), (BCC')) = \angle(AB; BC) = 60^\circ$.
- În figura 17, $ABCD A' B' C' D'$ este o prismă dreaptă cu bazele pătrate (prismă patrulateră regulată).
 - Fiecare muchie este perpendiculară pe planele fețelor cu care se intersectează.
 - Proiecțiile punctelor A' , B' , C' , D' pe planul (ABC) sunt, respectiv, punctele A , B , C și D . Proiecțiile punctelor A , B , B' , A' pe planul feței $DCC' D'$ sunt, respectiv, punctele D , C , C' și D' etc.
 - Oricare două fețe care au o muchie comună fac parte din plane perpendiculare.

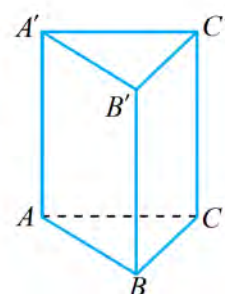


Figura 16

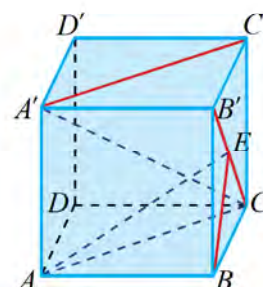


Figura 17

Exemple

$(AD' A') \perp (ABC)$, $(AD' A') \perp (DCC')$. Completează cu alte trei astfel de exemple.

- Unghiul dintre planele (ACC') și (ABB') este unghiul dintre dreptele AB și AC și are măsura 45° .
- Proiecția lui $A' C$ pe (ABC) este AC și deci unghiul dintre $A' C$ și (ABC) este unghiul $A' CA$ a cărui valoare se poate calcula în triunghiul dreptunghic $A' AC$ cu $\angle A' AC = 90^\circ$.
- Dacă dorim să calculăm distanța de la punctul A la dreapta $B' C$, ducem $BE \perp B' C$ și cum $AB \perp (BCB')$, rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că $AE \perp B' C$. Deci, distanța de la punctul A la dreapta $B' C$ este AE și se calculează cu teorema lui Pitagora din triunghiul dreptunghic ABE în care $BE = \frac{BC \cdot BB'}{B' C}$. Asemănător se poate exprima distanța de la A la $D' C$.



Probleme rezolvate

- 1 În figura 18 este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Se cere:
- distanța de la punctul A la dreapta $A'C$;
 - distanța de la punctul A' la dreapta BC' ;
 - tangenta unghiului dintre dreptele $A'B$ și DC ;
 - sinusul unghiului dintre dreapta $A'C$ și planul (ABA') ;
 - cosinusul unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) ;
 - distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$.

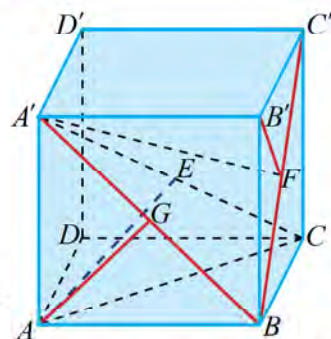


Figura 18

Soluție a) Ducem $AE \perp A'C$. $A'A \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC)$, rezultă $A'A \perp AC$. $AE = \frac{AA' \cdot AC}{A'C} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 12}{6\sqrt{6}} = 4\sqrt{3}$ cm. b) $A'B' \perp (BCC'B')$, ducem $B'F \perp BC'$. Din $B'F, BC' \subset (BCC'B')$, rezultă $A'F \perp BC'$.

$\Delta B'BC'$ - dreptunghic, rezultă $BC'^2 = B'B^2 + B'C'^2$, rezultă $BC' = 6\sqrt{3}$ cm. $B'F = \frac{B'B \cdot B'C'}{BC'} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$ cm. $\Delta A'B'F$ este dreptunghic în B' , rezultă $A'F^2 = A'B'^2 + B'F^2$, rezultă $A'F = 2\sqrt{33}$ cm.

c) Din $DC \parallel AB$, rezultă $\angle(A'B; DC) = \angle(A'B; AB) = \angle A'BA$. În $\Delta ABA'$, avem $\tan \widehat{ABA'} = \frac{A'A}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

d) Proiecția lui $A'C$ pe planul (ABA') este $A'B$, deoarece $CB \perp (ABA')$. Unghiul dintre $A'C$ și (ABA') este unghiul dintre $A'C$ și $A'B$, adică $\angle BA'C$. Din triunghiul dreptunghic $A'BC$, avem $\sin \widehat{BA'C} = \frac{BC}{A'C} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

e) Avem: $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $A'B \perp BC$, $A'B \subset (A'BC)$, $AB \perp BC$ și $AB \subset (ABC)$. Din toate acestea rezultă că unghiul dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) este unghiul dintre dreptele $A'B$ și AB , adică $\angle A'BA$. $\cos \widehat{ABA'} = \frac{AB}{A'B} = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

f) Din faptul că $BC \perp (ABA')$ și $BC \subset (A'BC)$, rezultă că $(ABA') \perp (A'BC)$. Deci, distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$ este distanța de la punctul A la $A'B$. Fie $AG \perp A'B$. $AG = \frac{AB \cdot AA'}{A'B} = \frac{6\sqrt{30}}{5}$ cm.

- 2 În figura 19 este reprezentată o prismă dreaptă cu bazele hexagoane regulate (prismă hexagonală regulată). Se știe că $AB = AA' = 12$ cm și se cere:

- distanța de la punctul A' la dreapta CD ;
- măsura unghiului dintre dreapta $A'C$ și planul (ABC) ;
- măsura unghiului dintre dreptele AB și $E'F'$;
- măsura unghiului dintre planele a două fețe laterale alăturate;
- distanța de la punctul A la planul $(C'CD)$.

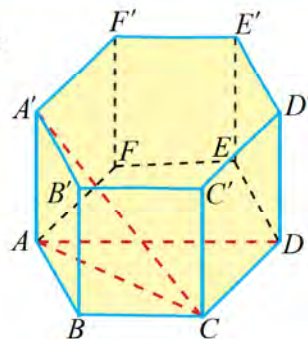


Figura 19

Soluție a) Avem: $A'A \perp (ABC)$, $AC \perp CD$ și $CD \subset (ACD)$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $A'C \perp CD$. În triunghiul dreptunghic $A'AC$, avem $AA' = 12$ cm, $AC = 12\sqrt{3}$ cm și, folosind teorema lui Pitagora, obținem $A'C = 24$ cm.

b) Proiecția lui $A'C$ pe (ABC) este AC . Deci unghiul dintre $A'C$ și (ABC) este unghiul dintre $A'C$ și AC care are măsura 30° . c) $F'E' \parallel FE$ și $FE \parallel BC$, rezultă $F'E' \parallel BC$, rezultă $\angle(AB; E'F') = \angle(AB; BC) = 60^\circ$.

d) Fie $ABB'A'$ și $BCC'B'$ două fețe alăturate. $(ABB') \cap (BCC') = BB'$, $AB \perp BB'$, $BC \perp BB'$, rezultă că unghiul dintre (ABB') și (BCC') este unghiul dintre dreptele AB și BC și acesta are măsura 60° .

e) $AC \perp CD$ și $AC \perp CC'$, rezultă $AC \perp (C'CD)$. Deci distanța de la A la $(C'CD)$ este AC și are lungimea $12\sqrt{3}$ cm.





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Fie M și N mijloacele muchiilor AB și $D'C'$ ale cubului $ABCD A'B'C'D'$. Dacă $MN = 8\sqrt{2}$ cm, calculează:
 - a) lungimea muchiei cubului;
 - b) aria triunghiului ANC .
- 2 Cubul $ABCD A'B'C'D'$ are muchia $AB = 8$ cm.
 - a) Calculează aria triunghiului $A'BD$.
 - b) Arată că $AC' \perp A'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.
- 3 În cubul $ABCD A'B'C'D'$, aria triunghiului DOB este egală cu $\sqrt{3}$ cm², unde $\{O\} = BC' \cap B'C$.
 - a) Arată că $AB = 2$ cm.
 - b) Calculează valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele DO și $A'B$.
- 4 Se consideră $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic care are $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm și măsura unghiului $BA'C$ este egală cu 30° .
 - a) Arată că $AA' = 6$ cm.
 - b) Calculează distanța de la punctul B la dreapta $A'C$.
 - c) Calculează distanța de la centrul feței $BCC'B'$ la planul $(A'BC)$.
- 5 Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are $BA' = 6$ cm, $CA' = 9$ cm și $DA' = 7$ cm.
 - a) Calculează dimensiunile paralelipipedului.
 - b) Demonstrează că $A'B \perp BC$.
 - c) Calculează valoarea sinusului unghiului format de planele $(A'BC)$ și $(B'AD)$.
- 6 Prisma dreaptă $ABCD A'B'C'D'$ are baza pătratul $ABCD$ cu $AB = 6$ cm și $AA' = 7$ cm.
 - a) Calculează aria patrulaterului $BCD'A'$.
 - b) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Calculează distanța de la punctul O la diagonală $A'C$.
 - c) Fie $\{O'\} = A'D \cap AD'$. Calculează măsura unghiului determinat de dreptele OO' și BC .
- 7 Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza ABC , un triunghi echilateral. Latura bazei are lungimea de 24 cm și înălțimea prisme are lungimea de 12 cm.
 - a) Calculează sinusul unghiului dintre dreapta $A'B$ și planul $(A'AC)$.
 - b) Calculează distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$.
 - c) Calculează valoarea sinusului unghiului dintre dreptele AB' și $A'C$.
- 8 Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are baza ABC , un triunghi echilateral, având centrul de greutate punctul O . Distanța de la punctul O la dreapta $A'B'$ este egală cu $\sqrt{37}$ cm și $AB = 12$ cm.
 - a) Calculează lungimea muchiei laterale a prisme.
 - b) Calculează valoarea tangentei unghiului determinat de planele (ABC) și $(A'B'O)$.
- 9 $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ este prismă dreaptă cu baza $ABCDEF$, hexagon regulat de centru O . Fețele laterale sunt pătrate. Dacă distanța de la punctul O la dreapta $A'B'$ este egală cu $4\sqrt{7}$ cm, calculează:
 - a) lungimea muchiei laterale;
 - b) distanța de la punctul A la planul $(A'CD)$.
- 10 Se consideră paralelipipedul dreptunghic *ALGORITHM* cu $AL = 8$ cm, $AO = 6$ cm și $AR = 10$ cm (vezi figura 20).
 - a) Arată că distanța de la punctul A la planul (MOI) este egală cu 4,8 cm.
 - b) Calculează distanța de la punctul A la planul (ROL) .

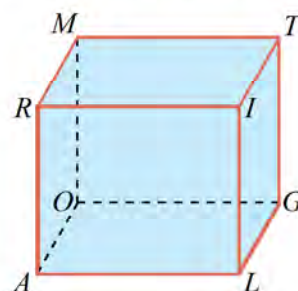


Figura 20

- 11 Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei $AB = 12$ cm și muchia laterală $AA' = 8$ cm.
 - a) Calculează sinusul unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) .
 - b) Calculează distanța de la punctul B la dreapta $A'C$.

LECȚIA 3

Aria și volumul piramidei regulate (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat)

⇒ **Aria laterală și aria totală a piramidei regulate**

Definiții

- Suma ariilor fețelor laterale ale unei piramide se numește *aria laterală* a piramidei.
- Suma ariilor tuturor fețelor unei piramide se numește *aria totală* a piramidei.

Notăm aria laterală cu $\mathcal{A}_l$, aria totală cu $\mathcal{A}_t$ și aria bazei cu $\mathcal{A}_b$. Între aria totală, aria laterală și aria bazei există relația evidentă:

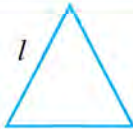
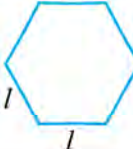
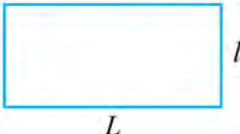
$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$$

Deoarece fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri congruente, ariile lor sunt egale. Aria unei fețe laterale este $\frac{l \cdot a_p}{2}$. Deci, pentru o piramidă a cărei bază este un poligon cu n laturi, avem $\mathcal{A}_l = \frac{n \cdot l \cdot a_p}{2}$.

Cum $n \cdot l = \mathcal{P}_b$ (perimetrul bazei), obținem formula: $\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}$

În particular, aria laterală a unui tetraedru regulat este $3 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$, iar aria totală este $4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = l^2 \sqrt{3}$.

Pentru a aplica aceste formule în cazurile concrete, folosim formule cunoscute privind perimetrul și aria dreptunghiului, precum și formule pentru perimetrele și ariile poligoanelor regulate cu 3, 4 și 6 laturi.

Poligonul	Figura	Perimetrul	Aria poligonului
Triunghiul echilateral de latură l		$3l$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$
Pătratul de latură l		$4l$	l^2
Hexagonul regulat de latură l		$6l$	$6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2}$
Dreptunghiul cu dimensiunile L și l		$2(L + l)$	Ll



Volumul piramidei regulate

Volumul $\mathcal{V}$ al unei piramide se calculează după formula de mai jos, unde am notat cu $\mathcal{A}_b$ aria bazei și cu h , înălțimea piramidei.

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$$



Secțiuni paralele cu baza în piramidă

Se consideră $SBAC$ o piramidă și planul α paralel cu planul (ABC) care intersectează muchiile SA , SB și SC în punctele A' , B' respectiv C' . Atunci suprafața triunghiulară $A'B'C'$ reprezintă secțiunea determinată de planul α în piramida considerată (vezi figura 21). Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea, raportul de asemănare k fiind egal cu raportul înălțimilor piramelor $SA'B'C'$ și $SABC$ sau cu raportul muchiilor corespunzătoare, adică avem:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}.$$

În aceste condiții, spunem că piramidele $SA'B'C'$ și $SABC$ sunt asemenea, raportul de asemănare fiind k . Să calculăm raportul volumelor celor două piramide

$$\frac{\mathcal{V}_{SA'B'C'}}{\mathcal{V}_{SABC}} = \frac{\frac{\mathcal{A}_{\Delta A'B'C'} \cdot SO'}{3}}{\frac{\mathcal{A}_{\Delta ABC} \cdot SO}{3}} = \frac{\mathcal{A}_{\Delta A'B'C'}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} \cdot \frac{SO'}{SO}. \text{ Dar } \frac{SO'}{SO} = k, \text{ iar raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal}$$

cu pătratul raportului de asemănare, adică $\frac{\mathcal{A}_{\Delta A'B'C'}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = k^2$. Rezultă $\frac{\mathcal{V}_{SA'B'C'}}{\mathcal{V}_{SABC}} = k^3$.

Considerațiile de mai sus sunt valabile pentru o secțiune paralelă cu baza în orice piramidă.

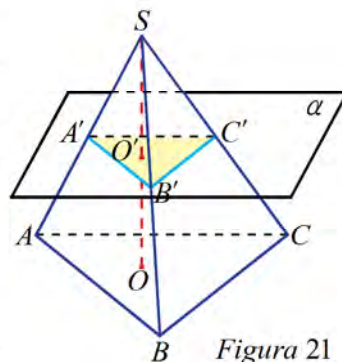


Figura 21

Temă

recomandată pentru lucru în echipe

Demonstrează că raportul ariilor laterale ale piramelor $SA'B'C'$ și $SABC$ este egal cu k^2 .

REȚINE!

Secționând o piramidă printr-un plan paralel cu baza, se obține o piramidă asemenea cu piramida dată. Raportul volumelor celor două piramide este egal cu cubul raportului de asemănare, iar raportul ariilor laterale (totale) este egal cu pătratul raportului de asemănare.



Probleme rezolvate

1 O piramidă triunghiulară regulată $SBAC$ are înălțimea de 8 cm, iar raza cercului înscris în triunghiul ABC este de 6 cm. Calculează:

- apotema piramidei;
- aria laterală și aria totală a piramidei;
- volumul piramidei;
- distanța de la punctul A la planul (SBC) .

Soluție a) Fie M , mijlocul laturii BC . Raza OM a cercului înscris în triunghiul ABC reprezintă apotema bazei (vezi figura 22). Rezultă $a_p^2 = a_b^2 + h^2 = 100$, deci $a_p = 10$ cm.

b) Avem $AM = 3 \cdot OM = 18$ cm, dar $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, de unde $l = 12\sqrt{3}$ cm.

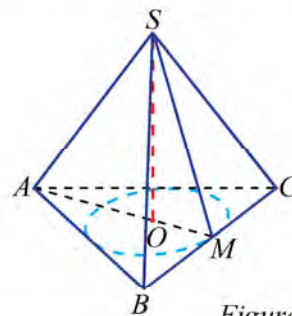


Figura 22



$$\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} = 180\sqrt{3} \text{ cm}^2; \mathcal{A}_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2; \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 288\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{c) } \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{108\sqrt{3} \cdot 8}{3} = 288\sqrt{3} \text{ cm}^3. \quad \text{d) Notăm distanța cerută cu } x. \text{ Considerând fața } SBC \text{ ca}$$

$$\text{bază a piramidei, avem } \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{\Delta SBC} \cdot x}{3}, \text{ dar } \mathcal{A}_{\Delta SBC} = \frac{BC \cdot SM}{2} = 60\sqrt{3}. \text{ Din } 288\sqrt{3} = \frac{60\sqrt{3} \cdot x}{3}, x = 14,4 \text{ cm.}$$

- 2** Dintr-o foaie de tablă pătrată $ABCD$ cu latura de 6 dm se confecționează o piramidă patrulateră cu baza $MNPQ$. Pentru aceasta, se înlătură triunghiurile AMB , BNC , CPD și DAQ , unde $MA = MB = NB = NC = PC = PD = QD = QA$ și $\angle AMB = 120^\circ$. Arată că partea rămasă reprezintă desfășurarea unei piramide regulate și calculează aria laterală, aria totală și apotema piramidei (vezi figura 23).

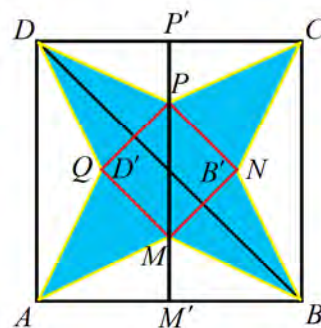


Figura 23

Soluție Triunghiurile MAB , NBC , PCD și QDA sunt congruente conform cazului L.L.L. Aceste triunghiuri sunt isoscele cu unghiurile de la bază de 30° . Triunghiurile QAM , MBN , NCP și PDQ sunt congruente conform cazului

L.U.L. și isoscele cu unghiurile de la vârf de 30° , deci cu unghiurile de la bază de 75° . Rezultă că $MN = NP = PQ = QM$ și $\angle QMN = 360^\circ - 120^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 90^\circ$. $MNPQ$ este romb cu un unghi drept, deci este pătrat.

Suprafața colorată reprezintă desfășurarea unei piramide patrulatere regulate având ca bază pătratul $MNPQ$ și muchiile laterale congruente. Fie M' proiecția lui M pe AB și P' proiecția lui P pe CD . În triunghiul AMM' , avem $MM' = AM' \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3} \text{ dm}$ și $AM = 2 \cdot MM' = 2\sqrt{3} \text{ dm}$. Notăm $MN = l$. Din $M'P' = MM' + MP + PP'$, obținem $6 = 2 \cdot \sqrt{3} + l\sqrt{2}$, de unde $l = (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \text{ dm}$. Obținem $\mathcal{A}_b = (3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = (24 - 12\sqrt{3}) \text{ dm}^2$.

Aria triunghiului ABM este $\frac{AB \cdot MM'}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ dm}^2$. Aria totală a piramidei este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{ABCD} - 4 \mathcal{A}_{\Delta MAB} = 36 - 4 \cdot 3\sqrt{3} = (36 - 12\sqrt{3}) \text{ dm}^2$, deci aria laterală este $36 - 12\sqrt{3} - (24 - 12\sqrt{3}) = 12 \text{ dm}^2$. BD taie MN în B' și PQ în D' . Atunci $BB' = DD' = a_p$ (apotema piramidei). Din $BD = BB' + B'D' + DD'$, obținem $6\sqrt{2} = 2a_p + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$, de unde $a_p = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \text{ dm}$.

- 3** Se consideră $SAB CDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu $AB = 10 \text{ cm}$ și măsura unghiului ASD de 60° (vezi figura 24). Calculează:

- aria laterală și aria totală a piramidei;
- volumul piramidei;
- distanța de la centrul bazei piramidei la o muchie laterală.

Soluție a) Triunghiul SAD este echilateral cu $AD = 2 \cdot AB = 20 \text{ cm}$. Notăm cu M mijlocul lui AB . Cum înălțimea piramidei este $h = SO = \frac{AD \cdot \sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$, obținem $SM^2 = SO^2 + OM^2 = (10\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2 = 375$, deci apotema piramidei este $a_p = SM = 5\sqrt{15} \text{ cm}$. Rezultă $\mathcal{A}_l = \frac{6 \cdot l \cdot a_p}{2} = 150\sqrt{15} \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_b = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 150(\sqrt{15} + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

$$\text{b) } \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{150\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{3} = 1500 \text{ cm}^3. \quad \text{c) } d(O, SA) = \frac{SO \cdot OA}{SA} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 10}{20} = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

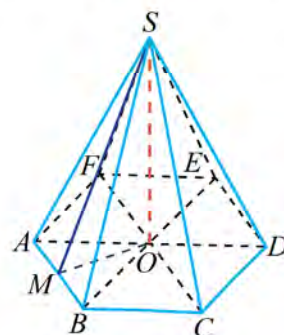


Figura 24



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Copiază și completează tabelul de mai jos, unde L , h , m , a_p , A_l , A_t și V reprezintă respectiv: latura bazei, înălțimea, muchia laterală, apotema, aria laterală, aria totală și volumul piramidei triunghiulare regulate.

L	h	m	a_p	A_l	A_t	V
6	3					
2		$\sqrt{13}$				
		13	12			
$2\sqrt{3}$				$9\sqrt{3}$		
				$75\sqrt{3}$	$100\sqrt{3}$	
	$4\sqrt{6}$					$144\sqrt{2}$

- 2 Calculează aria laterală, aria totală și volumul unei piramide triunghiulare cu toate muchiile congruente, egale cu $12\sqrt{3}$ cm.
- 3 Din șase bețișoare cu aceeași lungime, lipindu-le între ele la capete, construiește patru triunghiuri echilaterale.
- 4 Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are baza triunghiul ABC , M este mijlocul muchiei BC , $SA = 12\sqrt{2}$ cm și $\angle ASM = 90^\circ$.
- Calculează aria laterală și volumul piramidei.
 - Calculează distanța de la mijlocul segmentului AM la planul (SBC) .
 - Calculează lungimea celui mai scurt drum dintre punctele A și M pe suprafața laterală a piramidei.
- 5 Calculează volumul unei piramide cu toate muchiile congruente, știind că desfășurarea sa este un triunghi echilateral cu aria egală cu $16\sqrt{3}$ cm².
- 6 Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are toate muchiile congruente. Înălțimea piramidei este VO , punctul M este proiecția punctului O pe muchia VB și $MC = 2\sqrt{7}$ cm.
- Arată că $BC = 6$ cm.
 - Calculează volumul piramidei.
 - Calculează sinusul unghiului dintre dreapta MC și planul (VOC) .
- 7 În piramida triunghiulară regulată $VABC$, înălțimea VO are lungimea egală cu 12 cm, iar distanța de la punctul O la planul (VBC) este egală cu 7,2 cm.
- Arată că $AB = 18\sqrt{3}$ cm.
 - Calculează volumul piramidei $VABC$.
 - Știind că punctele G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale fețelor VAB , VAC , respectiv VBC , calculează volumul piramidei regulate $VG_1G_2G_3$.
- 8 Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC . Înălțimea piramidei este de 12 cm și măsura unghiului format de planul bazei cu o față laterală este de 60° .
- Calculează aria totală a piramidei.
 - La ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu planul bazei, astfel încât piramida mică formată să aibă volumul egal cu $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm³?
- 9 La un atelier de creație, Mihai construiește, din trei plăcuțe de plastic în formă de triunghi isoscel, cu latura bazei 12 cm și înălțimea corespunzătoare bazei de 8 cm, și dintr-o plăcuță în formă de triunghi echilateral cu latura de 12 cm, o piramidă triunghiulară regulată.
- Care a fost suprafața materialului de plastic necesară pentru confecționarea piramidei?
Aproximează la întreg!



b) Înainte de a adăuga baza piramidei, Mihai verifică dacă au fost făcute bine lipiturile fețelor laterale. Pentru aceasta, el dorește să umple interiorul piramidei cu apă. I-a fost suficient un pahar de 150 ml plin cu apă?

10 Cutiile pentru laptele primit de elevii unei școli au forma unui tetraedru regulat cu muchia de 1 dm.

a) Calculează aria suprafeței materialului necesar pentru o cutie.

b) Câți mililitri de lapte conține o cutie?

(Se ia pentru $\sqrt{2}$ valoarea aproximativă 1,41).

11 O piramidă hexagonală regulată are aria bazei de $32\sqrt{3} \text{ dm}^2$ și volumul de 128 dm^3 . Calculează aria laterală a piramidei și măsura unghiului unei fețe laterale cu planul bazei.

12 Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, de vârf V , are aria laterală egală cu $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și apotema piramidei de lungime $4\sqrt{3} \text{ cm}$. Calculează volumul piramidei și sinusul unghiului format de planul (VBD) cu planul bazei.

13 Copiază și completează tabelul de mai jos, unde L , h , m , a_p , A_l , A_t și V reprezintă respectiv: latura bazei, înălțimea, muchia laterală, apotema piramidei, aria laterală, aria totală și volumul unei piramide patrulater regulate.

L	h	m	a_p	A_l	A_t	V
$4\sqrt{2}$			3			
	5	10				
18				540		
	3					64
4						32
				2 320	3 920	

14 O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de $2\sqrt{3} \text{ cm}$ și unghiul unei fețe laterale cu planul bazei de 60° . Calculează aria totală și volumul piramidei.

15 O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile congruente și aria laterală de $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Calculează volumul piramidei și măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei.

16 O piramidă patrulateră regulată are apotema de $4\sqrt{7} \text{ cm}$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 60° . Calculează:

a) volumul piramidei;

b) distanța de la centrul bazei la o față laterală.

17 În piramida patrulateră regulată $VABCD$ de bază $ABCD$, latura bazei are lungimea de 12 cm, iar unghiul dintre planele (VAC) și (VBC) are măsura de 60° .

a) Arată că $BD \perp (VAC)$.

b) Calculează volumul piramidei.

c) Află măsura unghiului dintre planele (VBC) și (VCD) .

18 Un elev construiește din sârmă un model de piramidă patrulateră $VABCD$ cu toate muchiile congruente.

Pentru acest model elevul a folosit 96 cm de sârmă.

a) Calculează aria totală a piramidei $VABCD$.

b) Determină înălțimea piramidei $VABCD$.

19 Într-un camping, un cort are forma unei piramide patrulater regulate cu vârful S și baza $MNPQ$. Se cunoaște aria triunghiului SMN de $12\sqrt{3} \text{ m}^2$ și $SM = MN$.

a) Află înălțimea cortului.

b) Calculează câți m^2 de pânză de cort sunt necesari pentru confecționarea cortului (se știe că și baza cortului este confecționată din același material).

c) Află volumul aerului din cort.

20 Dintr-o bucată de lemn în formă de piramidă patrulateră regulată $SABCD$, un sculptor și-a conceput lucrarea eliminând două piramide patrulater regulate $SMNPQ$ și $OMNPQ$. Se știe că triunghiul SAC este echilateral de latură $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ m}$ și că punctele M , N , P și Q sunt mijloacele muchiilor SA , SB , SC , respectiv SD (vezi figura 25). Calculează:

a) înălțimea SO a piramidei;

b) volumul corpului eliminat;

c) aria totală a corpului rămas.

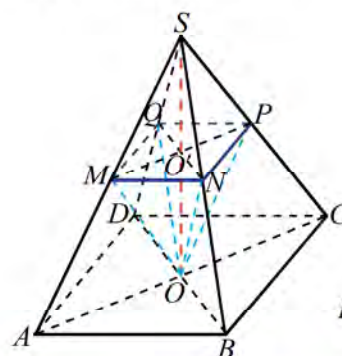


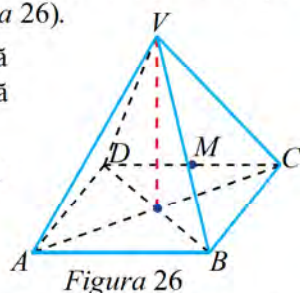
Figura 25

- 21** Copiază și completează tabelul de mai jos, unde L , h , m , a_p , $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă respectiv: latura bazei, înălțimea, muchia laterală, apotema piramidei, aria laterală, aria totală și volumul unei piramide hexagonale.

L	h	m	a_p	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
$2\sqrt{3}$			5			
2	1					
	4					$28\sqrt{3}$
$2a$		$2a\sqrt{2}$				

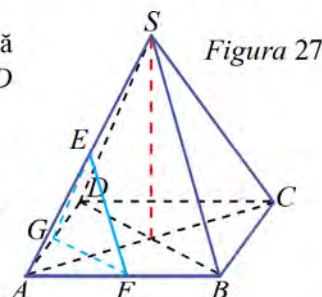
- 22** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V și $VA = AB = 6$ cm. Fie M mijlocul muchiei CD (vezi figura 26).

- Arată că aria laterală a piramidei este egală cu $36\sqrt{3}$ cm².
- Calculează volumul tetraedrului $VABM$.



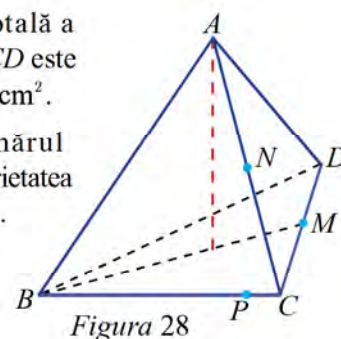
- 23** Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$, cu vârful S , $AB = 10$ cm, $SA = 20$ cm. Notăm cu E , F și G mijloacele muchiilor SA , AB , respectiv AD (vezi figura 27).

- Arată că aria laterală a piramidei $SABCD$ este egală cu $100\sqrt{15}$ cm².
- Calculează volumul piramidei $AEFG$.



- 24** Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ cu $AB = 12$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor CD , respectiv AC , iar punctul P este situat pe muchia BC astfel încât $BC = 4 \cdot CP$ (vezi figura 28).

- Arată că aria totală a tetraedrului $ABCD$ este egală cu $144\sqrt{3}$ cm².
- Determină numărul natural n cu proprietatea $\mathcal{V}_{ABCD} = n \cdot \mathcal{V}_{CMNP}$.



- 25** Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$. Fie punctul P situat pe SO , astfel încât $SP = 2 \cdot OP$. Se știe că $AC = 6\sqrt{2}$ cm, aria triunghiului SBD este egală cu aria bazei $ABCD$, $AP \cap SC = \{E\}$ și $BP \cap SD = \{F\}$.

- Calculează volumul piramidei $PABCD$.
- Arată că planele (OEF) și (SAB) sunt paralele.
- Calculează distanța dintre planele (OEF) și (SAB) .



Investigație



Temă

Recomandată pentru lucru în echipe

- Într-un acvariu cu dimensiunile de 2 dm, 3 dm și 4 dm înaltă 25 de peștișori. Investighează dacă, în orice moment, există cel puțin doi peștișori la distanță mai mică decât 18 cm.
- Un diamant are forma unui tetraedru regulat cu muchia de 3 cm. Diamantul este ambalat într-o cutiută cubică cu muchia de 4 cm.
 - Calculează volumul diamantului.
 - Calculează raportul dintre aria bazei diamantului și aria bazei cutiei.
 - Cât la sută din volumul cutiei reprezintă volumul diamantului?

- Aria unei fețe laterale a piramidei lui Keops este egală cu aria unui pătrat având latura egală cu înălțimea piramidei. Investighează dacă raportul dintre apotema piramidei și apotema bazei este un număr remarcabil.
 - Se notează raportul de la punctul a) cu litera grecească ϕ . Considerăm șirul $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots$. Demonstrează că fiecare termen al șirului, începând cu al treilea, este egal cu suma celor doi termeni dinaintea lui.

LECȚIA 4

**Aria și volumul prisme drepte
(cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat),
paralelipiped dreptunghic, cub**

⇒ **Aria laterală și aria totală a prisme drepte**

Definiții

- Suma ariilor fețelor laterale ale unei prisme drepte se numește *aria laterală* a prisme.
- Suma ariilor tuturor fețelor unei prisme drepte se numește *aria totală* a prisme.

Notăm aria laterală cu $\mathcal{A}_l$, aria totală cu $\mathcal{A}_t$ și aria bazei cu $\mathcal{A}_b$. Între aria totală, aria laterală și aria bazei există relația evidentă

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$$

Observăm că suprafața laterală (adică reuniunea fețelor laterale) a unei prisme drepte are ca desfășurare un dreptunghi având o dimensiune egală cu perimetrul bazei prisme (notat $\mathcal{P}_b$) și cealaltă dimensiune egală cu înălțimea prisme (notată h). Deci

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$$

În particular, aria totală a unui cub este $6l^2$, iar aria totală a unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile L , l și h , este $2(Ll + Lh + lh)$.

⇒ **Volumul prisme drepte**

După cum, în plan, unei suprafețe poligonale îi corespunde un număr pozitiv reprezentând aria acestei suprafețe, în spațiu, fiecărui poliedru îi corespunde un număr pozitiv numit *volumul poliedrului*. Volumul arată cât loc ocupă în spațiu poliedrul considerat.

Unitatea de măsură pentru arie este aria pătratului a cărui latură este unitatea de lungime. Analog, unitatea de măsură pentru volum este volumul cubului a cărui muchie este egală cu unitatea de lungime. Astfel, un cub cu latura de 1 m are volumul de 1 m^3 . Considerăm un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 3 \text{ cm}$, $l = 2 \text{ cm}$ și $h = 2 \text{ cm}$. Paralelipipedul se poate descompune în $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ cuburi cu latura de 1 cm (vezi figura 29).

Cu alte cuvinte, unitatea de 1 cm^3 se cuprinde de 12 ori în volumul paralelipipedului dat, deci $\mathcal{V} = 12 \text{ cm}^3$. Cele 12 cuburi au fost așezate în două straturi, de câte 6 cuburi, pentru că aria bazei paralelipipedului este $L \cdot l = 6 \text{ cm}^2$, iar înălțimea paralelipipedului este de 2 cm.

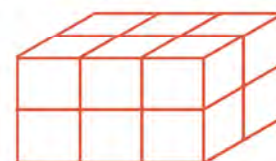


Figura 29

Volumul $\mathcal{V}$ al unei prisme drepte se calculează după formula

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$$

În particular, volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile L , l și h este $\mathcal{V} = L \cdot l \cdot h$, iar volumul

cubului cu muchia l este $\mathcal{V} = l^3$.



Probleme rezolvate

- 1 În prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ cu baza un pătrat, cunoaștem $A' C = 13$ cm și $AC = 12$ cm. Calculează aria laterală, aria totală și volumul prisme (vezi figura 30).

Soluție Cum $AC = AB\sqrt{2}$ și $AC = 12$ cm, obținem $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Deoarece $AA' \perp (ABCD)$, rezultă $AA' \perp AC$ și, din teorema lui Pitagora, $AA'^2 = A'C^2 - AC^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, de unde $AA' = 5$ cm.

Rezultă: $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 5 = 120\sqrt{2}$ cm². $\mathcal{A}_b = AB^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$ cm². $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 120\sqrt{2} + 2 \cdot 72 = (120\sqrt{2} + 144)$ cm². $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 72 \cdot 5 = 360$ cm³.

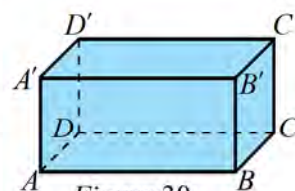


Figura 30

- 2 Secțiunea diagonală a unui cub are aria de $49\sqrt{2}$ cm² (vezi figura 31). Calculează aria totală, volumul și diagonală cubului.

Soluție Notând cu l latura cubului, secțiunea diagonală este un dreptunghi cu dimensiunile l și $l\sqrt{2}$. Obținem $l^2\sqrt{2} = 49\sqrt{2}$, deci $l = 7$.

Rezultă $\mathcal{A}_t = 6l^2 = 294$ cm² și $\mathcal{V} = l^3 = 343$ cm³.

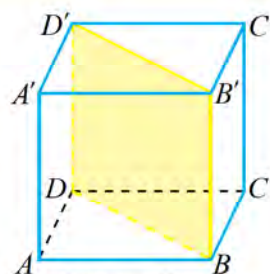


Figura 31

- 3 În figura 32 este reprezentată desfășurarea unei prisme drepte cu baza un triunghi echilateral. Știind că $CC' = 10$ cm și $BM = 3\sqrt{7}$ cm, calculează aria laterală, aria totală și volumul prisme.

Soluție Notăm $AB = l$. Fie D proiecția lui B pe AC . Avem $BD = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ și $MD = 2l + \frac{l}{2} = \frac{5l}{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul BDM , avem $(3\sqrt{7})^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5l}{2}\right)^2$, de unde $l = 3$. Rezultă: $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$ cm². $\mathcal{A}_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²; $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_b = \left(90 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ cm². $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = \frac{45\sqrt{3}}{2}$ cm³.

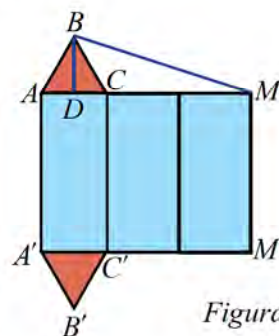


Figura 32

- 4 În figura 33 este reprezentată prisma dreaptă $ABCDEF$ cu baza triunghiul echilateral ABC . Dacă $AB = 12$ cm și unghiul dintre dreptele CE și AD are măsura de 30° , calculează aria laterală și volumul prisme.

Soluție Deoarece $AD \parallel BE$, rezultă că $\angle(CE; AD) = \angle(CE; BE) = \angle CEB$, deci $\angle CEB = 30^\circ$. Cum triunghiul CBE este dreptunghic în B și $BC = AB = 12$ cm, obținem $CE = 24$ cm și $BE = 12\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 36 \cdot 12\sqrt{3} = 432\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 36\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} = 1296$ cm³.

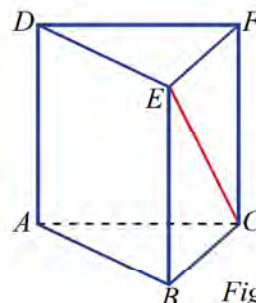


Figura 33

- 5 Se consideră $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ o prismă dreaptă cu baza un hexagon regulat. Știind că $F' C = 10$ cm și $AC' = 2\sqrt{21}$ cm, calculează aria laterală, aria totală și volumul prisme (vezi figura 34).

Soluție Avem $FC' = F' C$ ca diagonale în dreptunghiul $CC' F' F$, deci $FC' = 10$ cm. În cercul circumscris hexagonului regulat $ABCDEF$, punctele C și F sunt diametral opuse, deci $\angle CAF = 90^\circ$. Din $CC' \perp (ABC)$ și $CA \perp AF$, cu teorema celor trei perpendiculare, rezultă $C' A \perp AF$. Deci $AF^2 = C' F^2 - C' A^2$, de unde $l = AF = 4$ cm, apoi $FC = 2l = 8$ cm. Din triunghiul dreptunghic CAF , obținem $AC = 4\sqrt{3}$ cm, iar din triunghiul dreptunghic $CC' A$, rezultă $h = CC' = 6$ cm.

$$\mathcal{A}_l = P_b \cdot h = 6 \cdot 4 \cdot 6 = 144 \text{ cm}^2, \quad \mathcal{A}_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 16\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_b = (144 + 48\sqrt{3}) \text{ cm}^2, \quad \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 24\sqrt{3} \cdot 6 = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

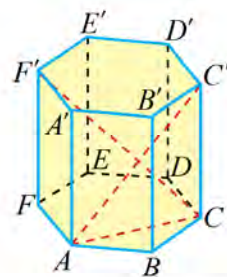


Figura 34


FIXARE
EXERSARE
CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Calculează aria laterală, aria totală, volumul și diagonala unui cub cu latura de 4 cm.
- 2 Aria laterală a unui cub este 100 cm^2 . Calculează aria totală și volumul cubului.
- 3 Volumul unui cub este de 216 cm^3 . Calculează:
a) aria totală; b) aria secțiunii diagonale.
- 4 Aria secțiunii diagonale a unui cub este de $49\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Calculează aria totală și volumul cubului.
- 5 În cubul $ABCD A' B' C' D'$, distanța de la punctul B' la dreapta AD' este egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Calculează diagonala și volumul cubului.
- 6 Copiază și completează tabelul alăturat în care l , h , $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă latura bazei, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unei prisme drepte cu baza un pătrat.
- 7 În cubul $ABCD A' B' C' D'$, punctul M este mijlocul muchiei AB , iar $MD' = 6$ cm.
a) Calculează aria laterală și volumul cubului.
b) Calculează distanța de la punctul C la planul $(MC' D')$.
- 8 Figura 35 reprezintă un container pentru colectarea deșeurilor, având forma unui cub $ABCD A' B' C' D'$ din care lipsește baza superioară (capacul). Pentru confecționarea containerului s-au folosit 1125 dm^2 de tablă.
a) Arată că lungimea muchiei este de 1,5 m.
b) Stabilește dacă încapă în container o vergea metalică, având lungimea de 2,5 m.
c) O furnică merge pe suprafața laterală din punctul A în punctul C' , pe drumul cel mai scurt. Știind că drumul său intersectează muchia BB' în punctul M , află lungimea segmentului BM .

l	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
3	4			
6		120		
	5	180		
12			$72(4\sqrt{3} + 4)$	
		96	128	
		120		150

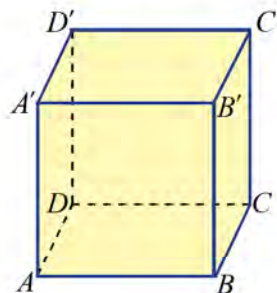


Figura 35

- 9 Din cubulețe de volum 8 dm^3 formăm un cub cu aria totală 216 dm^2 .
- Câte cuburi mici folosim pentru a forma cubul mare?
 - Din fiecare vârf al cubului mare eliminăm un cubuleț. Află volumul și aria corpului rămas.
- 10 Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 3 cm, 4 cm și 6 cm. Află aria totală, volumul și diagonala paralelipipedului.
- 11 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$ și măsura unghiului dintre dreapta AC' și planul (ABC) de 60° . Calculează aria totală și volumul paralelipipedului.
- 12 O piatră este pusă într-un vas cu apă în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 80 cm și lățimea 37,5 cm. Știind că astfel nivelul apei crește cu 1 cm, calculează volumul pietrei.
- 13 Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ are $AB = 20 \text{ cm}$, $BC = 16 \text{ cm}$ și $AA' = 15 \text{ cm}$.
- Calculează aria totală și diagonala paralelipipedului.
 - Calculează $d(B, DC')$.
 - Fie Q un punct situat pe muchia AA' . Calculează AQ , astfel încât perimetrul triunghiului $B' Q D$ să fie minim.
- 14 Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ este egală cu 60 cm, iar lungimea diagonalei $AC' = 9 \text{ cm}$.
- Calculează aria totală a paralelipipedului.
 - Dacă $A' C' \cap B' D' = \{O'\}$ și $AB = BC = 4 \text{ cm}$, calculează valoarea tangentei unghiului format de dreapta $O' A$ cu planul (DBB') .
- 15 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic și M mijlocul lui $A' D'$. Dacă $AB = 4a$, $BC = 2a$, $a > 0$ și aria triunghiului MBC egală cu $5a^2$, calculează:
- volumul paralelipipedului;
 - $d(B', AM)$;
 - $d(A, (MBC))$.
- 16 Un rezervor în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 5 m, lățimea 4 m și înălțimea de 3 m.
- Câți litri de apă încap în rezervor?
 - Dacă în rezervor sunt 24 000 l de apă, la ce înălțime se ridică apa?
 - Dacă rezervorul este plin și evacuăm apa cu ajutorul unui robinet care are debitul de 240 litri pe minut, în cât timp golim rezervorul?

- 17 Pătratul $ABCD$ din figura 36 ilustrează schematic o bucată de carton din care se confecționează o cutie fără capac în formă de paralelipiped dreptunghic. Pentru aceasta, se decupează din cele patru colțuri ale cartonului pătrate cu latura $x \text{ dm}$. Știind că $AB = 10 \text{ dm}$ și $x \in [1; 5]$, determină:

- volumul cutiei pentru $x = 2$;
- aria laterală a cutiei, în funcție de x ;
- valoarea lui x pentru care aria laterală a cutiei este maximă.

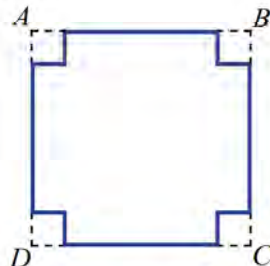


Figura 36

- 18 Un podium de premiere se obține prin lipirea a trei paralelipede dreptunghice având bazele congruente și înălțimi diferite, ca în figura 37. Se știe că $EM = 20 \text{ cm}$, $AB = BC = CD = 60 \text{ cm}$, $AH = 40 \text{ cm}$, $TN = 30 \text{ cm}$ și $JR = 20 \text{ cm}$.

- Calculează înălțimea paralelipedului corespunzător locului II.
- Calculează aria suprafeței pânzei necesare pentru a îmbrăca părțile vizibile ale podiumului (se consideră că nu sunt pierderi la îmbinări).
- O furnică se deplasează, în linie dreaptă, pe traseul $A \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow S \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow E$. Arată că furnica parcurge mai mult de 292 cm.

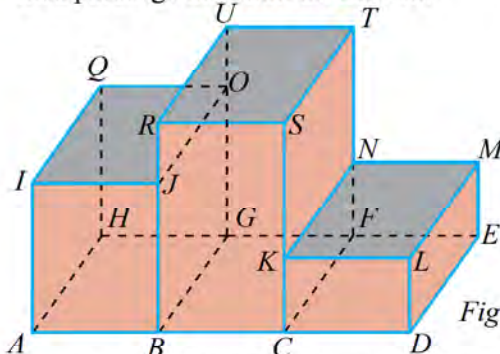


Figura 37

- 19 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un cub. Dacă distanța de la B la planul $(A' C' D)$ este egală cu $4\sqrt{3} \text{ cm}$, calculează aria laterală, aria totală și volumul cubului.
- 20 În cubul $ABCD A' B' C' D'$ punctele M și N se află pe muchiile DD' , respectiv BB' , astfel încât $MD' = BN = \frac{DD'}{4}$ și $MN = 2 \text{ cm}$. Calculează:
- volumul cubului;
 - distanța de la punctul B la planul (ACB') .

21 În cubul $ABCD A' B' C' D'$ aria totală și volumul sunt exprimate prin același număr, iar M este simetricul punctului B față de dreapta AD .

a) Arată că $MD \perp (D' DB)$.

b) Calculează distanța de la punctul M la dreapta $D' B$.

22 Prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ are ca bază pătratul $ABCD$, înălțimea $AA' = 9$ cm și diagonala $DB' = 3\sqrt{41}$ cm.

a) Calculează volumul prisme.

b) Calculează aria triunghiului ACD' .

c) Calculează distanța de la punctul B' la planul (ACD') .

23 O prismă dreaptă cu baza un pătrat are latura bazei de 8 cm și măsura unghiului dintre diagonala prisme și planul bazei de 60° . Calculează aria laterală și volumul prisme.

24 În prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ cu baza $ABCD$ pătrat, avem $BC' \cap CB' = \{O\}$, $AB = 2$ cm și înălțimea $BB' = 2\sqrt{3}$ cm.

a) Calculează aria totală și volumul prisme.

b) Arată că $D'O = 2\sqrt{2}$ cm.

c) Demonstrează că triunghiul AOD' este dreptunghic.

d) Calculează valoarea sinusului unghiului format de dreapta AO și dreapta $B'D'$.

25 Prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ are baza $ABCD$ un pătrat, aria laterală egală cu $100\sqrt{3}$ cm² și volumul egal cu $125\sqrt{3}$ cm³.

a) Arată că $AA' = 5\sqrt{3}$ cm.

b) Calculează distanța de la punctul A la dreapta $B'C$.

c) Calculează măsura unghiului dintre planele (DCB') și (ABC) .

d) Fie M un punct pe muchia BB' . Calculează BM astfel încât perimetrul triunghiului AMC' să fie minim.

26 Prisma patrulateră regulată $ABCDEFGH$ reprezintă o cutie de carton cu capac, având baza $ABCD$. Se știe că $AB = 20$ cm, $AE = 10$ cm, O este mijlocul segmentului EG și M este un punct pe BO , astfel încât distanța CM să fie minimă. Se cere:

a) volumul cutiei;

b) aria suprafeței cartonului folosit pentru confecționarea cutiei, știind că aceasta este cu 10% mai mare decât aria totală a cutiei;

c) lungimea segmentului CM .

27 O vază are forma unei prisme drepte cu baza un pătrat. Înălțimea vazei este de 40 cm, iar latura

bazei este de 10 cm. În vază se toarnă 3 litri de apă.

a) Calculează aria laterală a vazei.

b) Determină înălțimea la care se ridică apa în vază.

c) În vază se introduc patru cuburi de piatră, fiecare cub având muchia de 4 cm. Determină cu câți centimetri crește nivelul apei în vază.

28 Vlad și-a construit în curtea casei o piscină în formă de prismă dreaptă cu baza un pătrat cu latura de 5 m. Când piscina este plină conține 40 000 litri de apă.

a) Care este înălțimea piscinei?

b) Vlad dorește să placheze pereții laterali ai piscinei cu plăci dreptunghiulare de faianță cu dimensiunile de 20 cm, respectiv 40 cm, iar podeaua cu plăci pătrate de gresie cu latura de 50 cm. Câte plăci de faianță și câte de gresie trebuie să cumpere?

29 Prisma dreaptă $ABCA' B' C'$ cu baza ABC , triunghi echilateral, are $AB = 6$ cm și $AB' = 10$ cm. Calculează aria laterală și volumul prisme.

30 O prismă dreaptă cu baza un triunghi echilateral are raza cercului circumscris bazei de $2\sqrt{3}$ cm și volumul 135 cm³. Calculează aria totală a prisme.

31 Copiază și completează tabelul următor în care l , h , A_b , A_l și V reprezintă lungimea laturii bazei, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul prisme drepte cu baza triunghi echilateral.

l	h	A_b	A_l	V
6	8			
$2\sqrt{3}$		120		
		54	$6(9 + \sqrt{3})$	
6		108		
		120		$40\sqrt{3}$

32 Prisma dreaptă $ABCA' B' C'$ are baza ABC un triunghi echilateral și fețele laterale pătrate cu latura de $2\sqrt{2}$ cm. Calculează aria totală și volumul prisme.

33 $ABCA' B' C'$ este o prismă dreaptă cu baza ABC un triunghi echilateral. Volumul prisme este egal cu $54\sqrt{3}$ cm³. Muchiile AB și BB' sunt congruente, iar punctul M este mijlocul laturii AB .

- Arată că $AB = 6$ cm.
- Arată că planele (MCB') și (ABB') sunt perpendiculare.
- Calculează distanța de la punctul B la planul (MCB') .

34 Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are baza ABC un triunghi echilateral cu $AB = 10$ cm, $BB' = 5$ cm și punctul M este mijlocul lui $A'C'$.

- Calculează aria totală și volumul prisme.
- Determină măsura unghiului dintre dreptele AA' și MB .
- Calculează distanța de la punctul M la planul $(BB'C)$.

35 Acoperișul unei clădiri, reprezentat schematic în figura 38, are forma unei prisme drepte $ABCDEF$ cu $AD = 10$ cm, $AB = 6$ cm și bazele triunghiuri echilaterale.

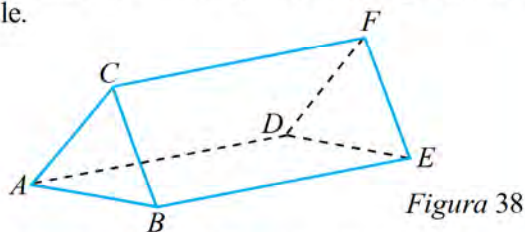


Figura 38

- Calculează distanța de la punctul C la dreapta AB .
- Calculează volumul prisme $ABCDEF$.
- Suprafețele $ADFC$ și $BEFC$ au fost acoperite cu tablă. Aria tablei cumpărată reprezintă 110% din aria suprafeței care a fost acoperită cu tablă. Determină câți metri pătrați de tablă s-au cumpărat.

36 Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ reprezintă un suport de creioane. Înălțimea suportului este de 12 cm, iar aria laterală a suportului este egală cu 288 cm² (vezi figura 39).

- Arată că lungimea laturii bazei este de 8 cm.
- Determină unghiul dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) .
- Un creion are un capăt în punctul A și celălalt capăt este mijlocul laturii $B'C'$. Demonstrează că lungimea creionului nu depășește 14 cm.

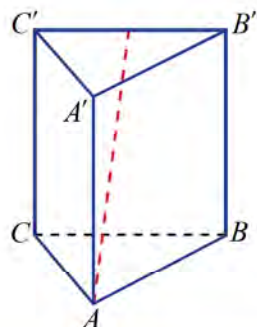


Figura 39

37 Un vas are formă de prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, în care latura bazei $AB = 24$ cm, iar muchia laterală $AA' = 63$ cm.

- Calculează volumul vasului.
- Putem pune 20 litri de apă în vas?
- O furnică merge pe suprafața laterală a vasului pe traseul $A \rightarrow M \rightarrow C'$, $M \in BB'$, $BM = 18$ cm pe drumul cel mai scurt. Află lungimea drumului parcurs de furnică.

38 O prismă dreaptă cu baza un hexagon regulat are latura bazei egală cu 2 cm și înălțimea egală cu $\sqrt{3}$ cm. Calculează:

- aria laterală;
- aria totală;
- volumul prisme.

39 O prismă dreaptă cu o baza hexagon regulat are aria laterală egală cu 48 cm² și aria totală egală cu $48(1 + \sqrt{3})$ cm². Calculează volumul prisme.

40 Prisma dreaptă $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ are una dintre baze hexagon regulat $ABCDEF$ de latură $AB = 3$ cm. Înălțimea prisme este $AA' = 3\sqrt{3}$ cm, iar punctul S este mijlocul segmentului EB' (vezi figura 40).

- Calculează aria laterală și volumul prisme.
- Demonstrează că triunghiul $AC'D'$ este dreptunghic.
- Calculează distanța de la punctul S la dreapta AC' .

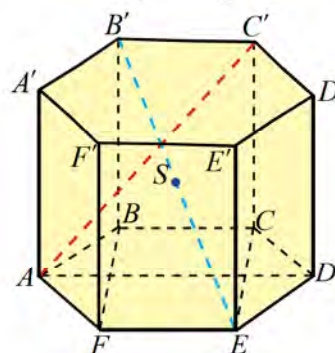


Figura 40

41 Se consideră o prismă dreaptă $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ având baza un hexagon regulat cu latura de 5 cm. Dacă măsura unghiului format de diagonala AC' cu planul bazei este de 60° , află aria totală și volumul prisme.

42 O cutie de carton, în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ are dimensiunile bazei $AB = 12$ cm, $AD = 9$ cm și înălțimea $AE = 20$ cm (se neglijează grosimea cartonului).

- Arată că aria totală a paralelipipedului este egală cu 1056 cm².
- Pe fețele laterale ale cutiei se aplică o bandă adezivă, de lungime minimă, între punctele B și H . Arată că lungimea benzii aplicate este mai mică decât 30 cm.



TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Desfășurarea suprafeței totale a unui tetraedru regulat este un triunghi echilateral cu latura 6 cm. Aria totală a tetraedrului este ... cm^2 .
- 5p 2 Volumul unei piramide hexagonale regulate este 1080 cm^3 , iar muchia bazei este 1,2 dm. Înălțimea piramidei este ... cm.
- 5p 3 Secțiunea diagonală a unei piramide patrulateră regulate este un triunghi dreptunghic isoscel cu aria 2 dm^2 . Volumul piramidei este ... dm^3 .
- 5p 4 O piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei de 6 cm și unghiul dintre o față laterală și planul bazei de 60° . Aria laterală a piramidei este ... cm^2 .
- 5p 5 O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală $20\sqrt{3} \text{ cm}$ și înălțimea 2 dm. Aria bazei este ... dm^2 .
- 5p 6 Dacă aria laterală a unui tetraedru regulat este $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$, aria bazei este ... cm^2 .

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Înălțimea unui tetraedru regulat este $3\sqrt{6} \text{ cm}$. Aria totală a tetraedrului este egală cu:
 A. $12\sqrt{6} \text{ cm}^2$ B. $\frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ C. $\frac{243\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ D. $81\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- 5p 2 O piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile egale are aria laterală $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Aria bazei este egală cu:
 A. $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ B. 16 cm^2 C. 8 cm^2 D. $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- 5p 3 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC și $VA \perp VB \perp VC \perp VA$. Dacă aria laterală este 32 cm^2 , atunci volumul piramidei este:
 A. $\frac{32}{3} \text{ cm}^3$ B. 32 cm^3 C. $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$ D. $\frac{32\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^3$
- 5p 4 În figura 41 se știe că triunghiurile MAB , NBC , PCD , QDE , REF și SFA sunt echilaterale cu latura de 4 cm. Această figură reprezintă o bucată de carton din care Bogdan a construit o piramidă hexagonală regulată. Aria totală a piramidei este:
 A. $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$ B. $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$ C. $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$ D. $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- 5p 5 O stâncă este în formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu muchia laterală $VA = 200 \text{ m}$ și măsura unghiului AVB de 45° . Un alpinist pornește din punctul A pe drumul cel mai scurt până la mijlocul muchiei VC . Lungimea drumului parcurs de alpinist este:
 A. 300 m B. $100(2\sqrt{2} + 1) \text{ m}$ C. $100\sqrt{5} \text{ m}$ D. 400 m
- 5p 6 O piramidă patrulateră regulată are aria laterală de 1040 cm^2 și aria totală 1440 cm^2 . Lungimea muchiei bazei este de:
 A. $10\sqrt{2} \text{ cm}$ B. 200 cm C. 12 cm D. 20 cm



Figura 41

SUBIECTUL al III-lea. Serie rezolvările complete (30 de puncte).

O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 10 \text{ cm}$ și apotema 13 cm.

- 10p a) Calculează volumul piramidei.
- 10p b) Demonstrează că muchia laterală este mai mică decât 14 cm.
- 10p c) Dacă punctul M se află pe muchia VC , determină lungimea segmentului VM , astfel încât aria triunghiului MBD să fie minimă.



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Volumul unui cub cu diagonala de $3\sqrt{3}$ cm este ... cm^3 .
- 5p 2 O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei $2\sqrt{3}$ dm și muchia laterală de 4 dm. Aria totală este ... dm^2 .
- 5p 3 Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 5 dm, 4 dm și 2 dm. Volumul paralelipipedului este ... dm^3 .
- 5p 4 O prismă patrulateră regulată are aria bazei 16 cm^2 și volumul 80 cm^3 . Aria laterală a prisme este ... cm^2 .
- 5p 5 Pe un șantier se sapă o groapă în formă de paralelipiped dreptunghic, cu lungimea 6 m, lățimea 5 m și adâncimea 2 m. Pentru a nu se surpa, pe pereți se pun placaje. Aria placajului folosit are ... m^2 .
- 5p 6 Într-un vas în formă de prismă patrulateră regulată cu aria bazei 10 dm^2 și înălțimea 3 dm, se toarnă 25 litri de apă. Înălțimea până la care se ridică apa în vas este ... dm.

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Volumul unui cub este 27 cm^3 . Aria totală a cubului este:
A. 27 cm^2 B. 36 cm^2 C. 54 cm^2 D. 45 cm^2
- 5p 2 Un paralelipiped dreptunghic are diagonala de $5\sqrt{2}$ cm și aria totală 94 cm^2 . Suma lungimilor muchiilor paralelipipedului este:
A. 12 cm B. 48 cm C. 25 cm D. 47 cm
- 5p 3 O prismă triunghiulară regulată are aria laterală 60 cm^2 și aria totală $4(15 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. Volumul prisme este:
A. $20\sqrt{3} \text{ cm}^3$ B. $15\sqrt{6} \text{ cm}^3$ C. $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ D. $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- 5p 4 O bucată de brânză în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 18 cm, lățimea 12 cm și înălțimea 8 cm se taie în cuburi egale cu muchia exprimată printr-un număr natural de centimetri. Numărul maxim de cuburi poate fi:
A. 72 B. 216 C. 108 D. 1 844
- 5p 5 O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea 20 m, lățimea 10 m și adâncimea 2 m. Câte găleți cu vopsea sunt necesare pentru vopsirea interiorului piscinei, știind că o găleată de vopsea poate acoperi o suprafață de 10 m^2 :
A. 32 B. 52 C. 20 D. 12
- 5p 6 O prismă patrulateră regulată are volumul 100 cm^3 și aria laterală 80 cm^2 . Aria bazei este:
A. 5 cm^2 B. 20 cm^2 C. 25 cm^2 D. 40 cm^2

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

Un acvariu are formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 60 cm, lățimea 40 cm și înălțimea 20 cm.

- 10p a) Până la ce înălțime se ridică apa, dacă se toarnă în acvariu 36 litri de apă?
- 10p b) Câte cuburi cu muchia de 10 cm încap în acvariul gol?
- 10p c) Dacă în acvariul plin cu apă sunt 49 de peștișori, demonstrează că în orice moment găsim doi peștișori astfel încât distanța dintre ei să fie mai mică decât 17,5 cm.



LECTIA 5

Aria și volumul cilindrului circular drept


Descrierea cilindrului circular drept
Elementele cilindrului circular drept

În *figura 42*, am reprezentat o suprafață dreptunghiulară $OO'A'A$. Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei OO' , se obține un cilindru circular drept. Spunem că cilindrul circular drept este un corp de rotație. Vom pune în evidență elementele sale.

- Prin rotirea în jurul punctului O , în plan perpendicular pe OO' , segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA . La fel, prin rotirea în jurul punctului O' , în plan perpendicular pe OO' , segmentul $O'A'$ descrie discul de centru O' și rază $O'A'$. Cele două discuri constituie *bazele* cilindrului circular drept. Bazele sunt două discuri de raze egale situate în plane paralele. Denumirea de cilindru circular drept este motivată de faptul că bazele cilindrului sunt discuri (deci suprafețe mărginite de cercuri, iar dreapta care unește centrele lor este perpendiculară pe planele bazelor.
- Dreapta OO' determinată de centrele bazelor se numește *axa* cilindrului (axa de rotație).
- Segmentul AA' și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Deci, o generatoare a cilindrului circular drept este un segment MM' , unde M și M' aparțin respectiv cercurilor celor două baze, iar dreapta MM' este perpendiculară pe planele bazelor.
- Distanța dintre cele două baze ale cilindrului se numește *înălțime*. Vom nota raza bazei cilindrului cu R , înălțimea cu h și lungimea generatoarei cu G . Deci $G = h$.

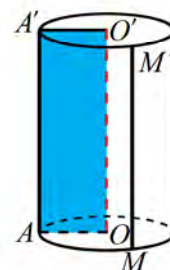


Figura 42


Desfășurarea cilindrului circular drept
Aria laterală și aria totală a cilindrului circular drept

O generatoare a cilindrului circular drept, rotindu-se în jurul axei, generează suprafața laterală a cilindrului. În *figura 43* este reprezentată o cutie de carton cilindrică a cărei suprafață laterală este colorată în albastru, iar bazele sunt colorate în roșu.

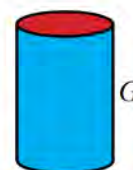


Figura 43

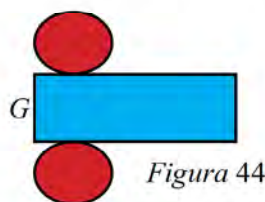


Figura 44

Decupând cercurile bazelor și tăind suprafața laterală de-a lungul unei generatoare, suprafața cutiei poate fi desfășurată pe un plan (vezi *figura 44*).

Desfășurarea suprafeței laterale este un dreptunghi având o dimensiune egală cu lungimea cercului bazei, iar cealaltă dimensiune egală cu generatoarea cilindrului.

Obținem formula ariei laterale: $\mathcal{A}_l = 2\pi RG$

- Aria totală se calculează din relația:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$$

- Cum aria bazei este $\mathcal{A}_b = \pi R^2$, obținem:

$$\mathcal{A}_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R)$$

⇒ Volumul cilindrului circular drept

- Volumul cilindrului circular drept se calculează după aceeași formulă ca și volumul prisme drepte:

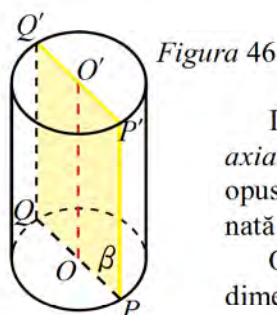
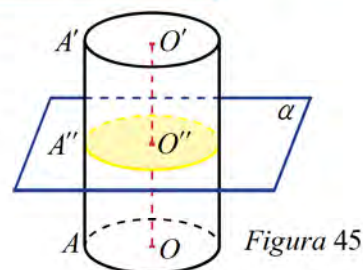
$$V = A_b \cdot h$$

- Cum în cazul cilindrului circular drept, $A_b = \pi R^2$, obținem:

$$V = \pi R^2 h$$

⇒ Secțiuni în cilindrul circular drept: secțiuni paralele cu baza și secțiuni axiale

Intersecția nevidă a unui cilindru circular drept cu un plan paralel cu baza este un disc congruent cu baza. Dacă planul α , paralel cu planul bazei, intersectează segmentele OO' și AA' în punctele O'' și A'' , atunci secțiunea determinată de acest plan în cilindru este discul de centru O'' și rază $O''A'' = OA = R$ (vezi figura 45).



Intersecția unui cilindru circular drept cu un plan care conține axa se numește *secțiune axială în cilindru*. Planul β ce conține axa OO' , taie cercul unei baze în punctele diametral opuse P și Q , iar cercul celeilalte baze în punctele diametral opuse P' și Q' . Secțiunea determinată de planul β în cilindru este suprafața dreptunghiulară $PQQ'P'$ (vezi figura 46).

O secțiune axială într-un cilindru circular drept este o suprafață dreptunghiulară, având ca dimensiuni lungimea diametrului și lungimea generatoarei cilindrului dat.



Probleme rezolvate

- 1 Pentru a calcula volumul unei piese de formă neregulată, o scufundăm într-un vas cilindric cu apă. Știind că diametrul vasului este de 30 cm și că prin introducerea piesei, nivelul apei s-a ridicat cu 5 cm, determină volumul piesei.

Soluție Volumul piesei este egal cu volumul unui cilindru cu raza de 15 cm și înălțimea de 5 cm.

$$\text{Deci } V = \pi \cdot 15^2 \cdot 5 = 1125\pi \approx 3534,3 \text{ cm}^3.$$

- 2 Un pahar cilindric are $G = 2R$ și volumul egal cu $250\pi \text{ cm}^3$ (vezi figura 47). Încape în acest pahar un pai având lungimea de 15 cm?

Soluție Volumul paharului este $V = \pi R^2 \cdot h$. Cum $h = G = 2R$, obținem că $V = 2\pi R^3$. Deci $2\pi R^3 = 250\pi$, de unde rezultă că $R = 5 \text{ cm}$, $G = 10 \text{ cm}$.

Secțiunea axială a cilindrului este un pătrat având latura egală cu 10 cm, deci diagonală egală cu $10\sqrt{2} \text{ cm}$. Cum $10\sqrt{2} = \sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$, rezultă că paiul nu încapă în pahar.

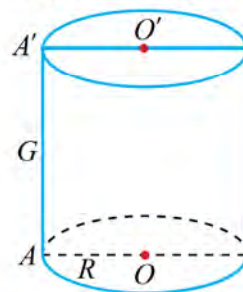


Figura 47

- 3 Un cilindru circular drept are volumul $V = 360\pi \text{ cm}^3$ și aria secțiunii axiale de 120 cm^2 . Calculează aria bazei cilindrului.

Soluție $V = \pi R^2 \cdot h = 360\pi$, deci $R^2 \cdot h = R^2 \cdot G = 360 \text{ cm}^3$. Secțiunea axială este un dreptunghi de dimensiuni $2R$ și G , deci $2RG = 120$, adică $RG = 60 \text{ cm}^2$. Obținem $R = 6 \text{ cm}$ și $A_b = \pi R^2 = 36\pi \text{ cm}^2$.



FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Copiază și completează tabelul următor în care R , G , A_l , A_t și V reprezintă: raza, generatoarea, aria laterală, aria totală și volumul unui cilindru circular drept.

R	G	A_l	A_t	V
4	7			
5		100π		
	4	200π		
2				40π
		124π	196π	

- 2 Un cilindru circular drept are generatoarea de 4 cm și aria bazei de $36\pi \text{ cm}^2$. Calculează aria totală și volumul cilindrului.
- 3 O cutie de suc are forma unui cilindru circular drept cu raza bazei de 4 cm și înălțimea de 15 cm.
- Arată că în cutie încap 750 ml de suc.
 - Calculează aria laterală a cutiei.
 - O cutie de carton sub formă de paralelipiped dreptunghic, are cele mai mici dimensiuni posibile pentru a ambala 24 de cutii de suc grupate în patru rânduri de câte 6 cutii. Determină aria totală și volumul cutiei de carton.
- 4 Suprafața laterală a unui cilindru circular drept se desfășoară după un dreptunghi care are lungimea de 12π și lățimea de 8 cm, egală cu generatoarea cilindrului. Calculează aria laterală, aria totală, volumul și aria secțiunii axiale a cilindrului.
- 5 Un cilindru circular drept are secțiunea axială un pătrat cu aria egală cu 16 cm^2 . Calculează volumul cilindrului.
- 6 Un butoi în formă de cilindru circular drept, cu o bază situată într-un plan orizontal α și având raza de 30 cm și generatoarea de 1 m, se umple cu apă. Se apleacă butoiul astfel ca apa să curgă până când nivelul apei rămase atinge mijlocul generatoarei BB' , după care butoiul revine la poziția verticală.

- Calculează volumul butoiului.
- Câți litri de apă rămân în butoi după înclinarea acestuia? (Rotunjeți rezultatul la un număr întreg).

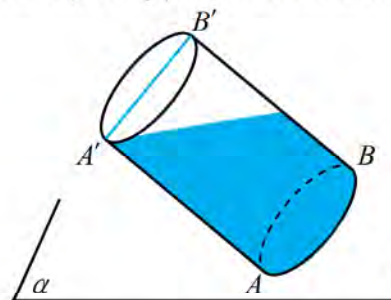


Figura 48

- 7 Calculează masa unei țevi cilindrice cu diametrul interior de 12 mm, diametrul exterior de 16 mm și lungimea de 200 cm, știind că densitatea materialului din care este confecționată țeava este $7,8 \text{ g/cm}^3$.
- 8 Două cutii cilindrice cu vopsea sunt ambalate în plastic, așa cum observi în figura 49. Dimensiunile fiecărei cutii sunt: înălțimea 20 cm, diametrul 10 cm. Calculează aria foliei din plastic folosită la împachetare.
- 9 Dintr-o bară metalică în formă de prismă dreaptă cu baza pătrată cu latura bazei de 1 dm și înălțimea egală cu 1,5 m se strunjește un ax cilindric cu pierdere minimă de material. Calculează volumul axului obținut și volumul pierderilor de material.

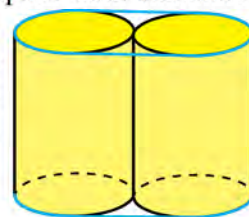


Figura 49

- 10 În figura 50 este reprezentată o țevă din material plastic în formă cilindrică și la exterior și la interior. Diametrul interior este de 3 cm, grosimea pereților țevii este 0,5 cm, iar înălțimea este de 1 m.



Figura 50

- Arată că diametrul exterior al țevii este de 4 cm.
- Calculează volumul țevii.
- Calculează masa țevii, știind că densitatea materialului din care este confecționată este $0,4 \text{ g/cm}^3$ (se va considera pentru π aproximarea 3,14).

LECȚIA 6

Aria și volumul conului circular drept



Descrierea conului circular drept



Elementele conului circular drept

În viața cotidiană, în natură, în tehnică întâlnim obiecte care au formă de con, cum sunt: diverse vase, recipiente (în formă de conuri cu vârful în jos), pâlnii, acoperișuri ale unor turnuri, vârfuri ale unor unelte, vârfurile creioanelor ascuțite cu ascuțitoarea; formele de relief numite conuri vulcanice au aproximativ formă de con. Conul circular drept este un corp de rotație. În figura 51, am reprezentat o suprafață triunghiulară VAO cu unghiul O de 90° .

Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei VO , se obține un con circular drept.

- Punctul V reprezintă vârful conului.
- Prin rotirea în jurul punctului O , în plan perpendicular pe VO , segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA . Acest disc constituie baza conului circular drept. Denumirea de con circular drept este motivată de faptul că baza este un disc (deci o suprafață mărginită de un cerc), iar dreapta care unește vârful cu centrul bazei este perpendiculară pe planul bazei.
- Dreapta VO reprezintă axa conului (axa de rotație).
- Segmentul VA și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Deci, o generatoare a conului circular drept este un segment VM , unde M aparține cercului bazei.
- Distanța VO de la vârful conului la planul bazei se numește *înălțime*.

Vom nota raza bazei conului cu R , înălțimea cu h și lungimea generatoarei cu G .

Are loc relația:

$$G^2 = R^2 + h^2$$

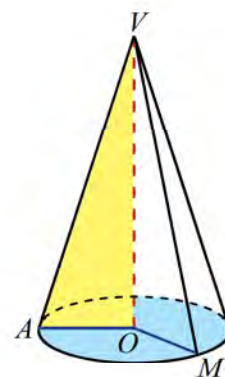


Figura 51



Desfășurarea conului circular drept

Aria laterală și aria totală a conului circular drept

Reuniunea tuturor segmentelor VM , unde V este vârful conului, iar punctul M este mobil pe cercul bazei, formează suprafața laterală a conului. Dintr-o bucată de carton, tăiați un sector circular, apoi prin înfășurare și lipire, confecționați un coif reprezentând suprafața laterală a unui con circular drept.

Desfășurarea pe un plan a suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector circular a cărui rază este generatoarea conului, iar lungimea arcului corespunzător sectorului este egală cu lungimea cercului bazei (vezi figura 52).

Aria laterală a conului (notată $\mathcal{A}_l$) este egală cu aria sectorului. Notăm cu n° , măsura arcului ce corespunde sectorului. Pentru a determina valoarea lui n în funcție de elementele conului, facem următorul raționament:

Cercul de centru V și rază G , având lungimea $2\pi G$, corespunde unui arc de 360° . Atunci arcul BB' , având lungimea $2\pi R$, are măsura $n^\circ = \frac{2\pi R \cdot 360^\circ}{2\pi G} = \frac{R \cdot 360^\circ}{G}$.

Înlocuind această valoare în $\mathcal{A}_l = \frac{\pi G^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$, obținem: $\mathcal{A}_l = \pi RG$

Evident, aria totală a conului circular drept este dată de relația:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$$

Cum aria bazei este aria discului de rază R , obținem:

$$\mathcal{A}_t = \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G + R)$$

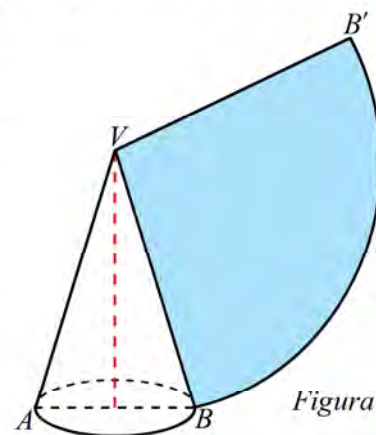


Figura 52

Observații

1. Dacă arcul BB' al sectorului circular ce constituie desfășurarea suprafeței laterale are măsura cel mult egală cu 180° , atunci măsura unghiului sectorului coincide cu măsura arcului corespunzător.
2. Formal, putem obține formula ariei laterale a conului circular drept, pornind de la formula ariei laterale a piramidei regulate, $\mathcal{A}_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, în care înlocuim perimetrul bazei cu lungimea cercului, iar apotema piramidei cu generatoarea.



Volumul conului circular drept

Volumul conului circular drept se calculează după aceeași formulă ca și volumul piramidei:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$$

Cum în cazul conului circular drept, $\mathcal{A}_b = \pi R^2$, obținem:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



Secțiuni în conul circular drept: secțiuni paralele cu baza și secțiuni axiale

Intersecția nevidă a unui con circular drept cu un plan paralel cu baza (și care nu trece prin vârf) este un disc. Considerăm un con circular drept de vârf V , având ca bază discul de centru O și rază $OA = R$. Un plan α , paralel cu planul bazei, taie segmentul (VO) în O' și segmentul (VA) în A' . Secțiunea determinată de planul α în conul dat este discul de centru O' și rază $r = O'A'$ (vezi figura 53).

Dacă notăm $VO' = h'$, din asemănarea triunghiurilor $VO'A'$ și VOA obținem relația: $\frac{r}{R} = \frac{h'}{h}$. De aici, deducem că raportul dintre volumul $\mathcal{V}'$ al conului mic și

volumul $\mathcal{V}$ al conului mare este: $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = \frac{\frac{1}{3}r^2 h'}{\frac{1}{3}R^2 h} = \left(\frac{r}{R}\right)^3$.

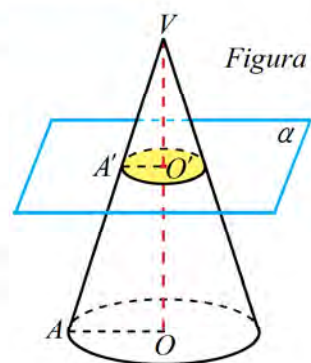
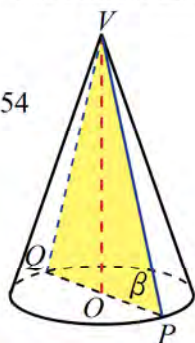


Figura 53

Figura 54



Intersecția unui con circular drept cu un plan care conține axa conului se numește *secțiune axială* în con.

Planul β ce conține axa VO taie cercul bazei în două puncte diametral opuse P și Q . Secțiunea determinată de planul β în con este suprafața triunghiulară VPQ (vezi figura 54). O secțiune axială într-un con circular drept este o suprafață triunghiulară determinată de un triunghi isoscel, având baza diametrul discului și laturile congruente generatoare ale conului.

Temă

recomandată pentru lucru în echipă

Demonstrează că raportul dintre ariile laterale (totale) ale celor două conuri este egal cu $\left(\frac{r}{R}\right)^2$.



Problemă rezolvată

Desfășurarea pe un plan a suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector circular cu raza de 12 m și măsura unghiului de 120° . Calculează aria totală, volumul și aria secțiunii axiale a conului circular drept.

Soluție Aria laterală a conului este egală cu aria sectorului circular, adică cu $\frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 48\pi \text{ m}^2$. Raza sectorului de 12 m este generatoarea conului. Din $48\pi = \pi \cdot 12 \cdot R$, găsim $R = 4 \text{ m}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 48\pi + \pi \cdot$

$16 = 64\pi \text{ m}^2$. Înălțimea este $h = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{144 - 16} = 8\sqrt{2} \text{ m}$, deci $\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{128\sqrt{2}\pi}{3} \text{ m}^3$.

Aria secțiunii axiale este $\mathcal{A} = \frac{2Rh}{2} = Rh = 32\sqrt{2} \text{ m}^2$.





FIXARE

EXERSARE

CONSOLIDARE

PROBLEME



- Desenează corpuri din realitatea înconjurătoare care au formă de con.
- Decupează din carton un sector circular de rază 20 cm care corespunde unui arc cu măsura de 270° . Calculează raza pe care trebuie să o aibă un disc, astfel încât să reprezinte baza unui con a cărui suprafață laterală desfășurată reprezintă sectorul considerat. Construiește apoi conul și calculează volumul său.
- O foaie de tablă are forma unui sector circular cu raza 48 cm și arcul corespunzător 240° .
 - Arată că înălțimea conului este $16\sqrt{5}$ cm.
 - Calculează volumul conului.
 - Calculează aria laterală a conului.
- Generatoarea unui con are 8 cm și face cu planul bazei conului un unghi de 30° . Calculează aria totală și volumul conului.
- Copiază și completează tabelul următor, în care R , G , h , $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă: raza, generatoarea, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unui con circular drept.

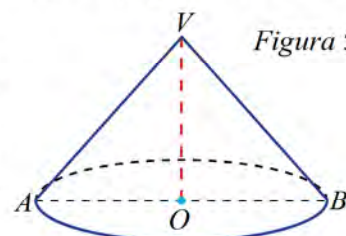
R	G	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
12	13				
6		8			
	10		60π		
9					324π
			$12\sqrt{3}\pi$	$12\pi(\sqrt{3}+1)$	
			6π		$2\pi\sqrt{3}$

- Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic cu aria egală cu 32 cm^2 . Calculează aria laterală, aria totală și volumul conului.
- Într-un con circular drept, perimetrul secțiunii axiale este de 32 cm, iar cosinusul unghiului dintre o generatoare și planul bazei este egal cu 0,6. Calculează volumul conului.

- Într-un con circular drept de vârf V , generatoarele VA , VB și VC sunt perpendiculare două câte două, iar $AB = 18 \text{ cm}$.
 - Calculează aria laterală și volumul conului.
 - Fie punctul M mijlocul segmentului BC . Calculează măsura unghiului dintre planele (AVM) și (AVB) .
- Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un semicerc cu raza de 4 cm. Calculează volumul conului.
- Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc cu raza de 14 cm și unghi de 120° . Determină aria laterală și volumul conului.
- Un con circular drept are generatoarea de două ori mai mare decât raza. Calculează măsura unghiului sectorului obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului.
- Un con circular drept are raza de 3 cm și înălțimea de 4 cm. La ce distanță de vârf trebuie făcută o secțiune paralelă cu baza, astfel încât aria secțiunii să fie un sfert din aria bazei?
- Se consideră un con circular drept cu înălțimea de 12 cm și raza $2\sqrt{3}$ cm. Prin punctul M care aparține înălțimii VO a conului și este egal depărtat de vârful conului și de orice punct al cercului bazei, se duce un plan paralel cu planul bazei. Află volumul conului mic.

- În figura 55 este reprezentat un con circular drept, cu înălțimea $VO = 16 \text{ cm}$ și generatoarea $VA = 20 \text{ cm}$.

- Arată că aria bazei este egală cu $144\pi \text{ cm}^2$.
- Calculează aria secțiunii axiale a conului.



- Un con circular drept are $R = 24 \text{ cm}$ și $G = 25 \text{ cm}$. La ce distanță față de vârf trebuie făcută o secțiune paralelă cu baza, astfel încât aria secțiunii să fie $36\pi \text{ cm}^2$?

LECȚIA 7

Trunchiul de piramidă regulată

Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată


Descrierea trunchiului de piramidă regulată
Elementele trunchiului de piramidă regulată

Secționând o piramidă cu un plan paralel cu baza acesteia, se obține o piramidă asemenea cu cea dată.

Îndepărtând această piramidă, se obține un poliedru a cărui denumire este trunchi de piramidă. Dacă piramida este regulată, se spune despre trunchi că este de piramidă regulată. În figurile 56, 57 și 58 sunt reprezentate: trunchiul de piramidă triunghiulară regulată, trunchiul de piramidă patrulateră regulată și trunchiul de piramidă hexagonală regulată.

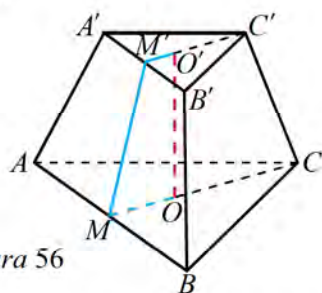


Figura 56

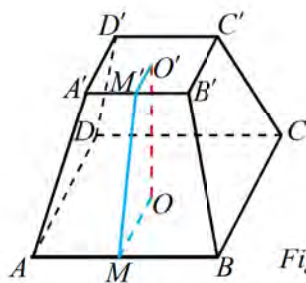


Figura 57

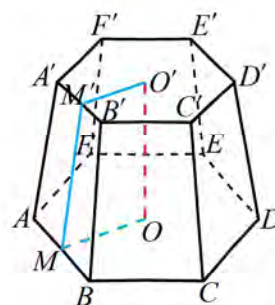


Figura 58

Reamintim câteva dintre definițiile și proprietățile cunoscute ale unui trunchi de piramidă.

- Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt congruente.
- Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze isoscele congruente.
- Bazele unui trunchi de piramidă regulată sunt poligoane regulate asemenea.
- Distanța dintre planele bazelor unui trunchi de piramidă se numește *înălțimea trunchiului*.
- Înălțimea unuia dintre trapezele care constituie fețele laterale ale unui trunchi de piramidă se numește *apotema trunchiului*.

Notăm cu O și O' centrele cercului circumscris poligoanelor ce constituie bazele trunchiului de piramidă, iar cu M și M' mijloacele laturilor AB și $A'B'$.

În trapezul dreptunghic $OMM'O'$ (vezi figura 59), avem:

- $OO' = h$ (înălțimea trunchiului); $OM = a_B$ (apotema bazei mari);
 $O'M' = a_b$ (apotema bazei mici); $MM' = a_t$ (apotema trunchiului).

Prin urmare, are loc relația:

$$a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$$

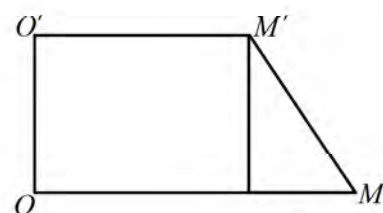


Figura 59


Desfășurarea trunchiului de piramidă regulată

În figurile alăturate sunt reprezentate desfășurările pe un plan ale trunchiului de piramidă triunghiulară (vezi figura 60), patrulateră (vezi figura 61) și hexagonală regulată (vezi figura 62).

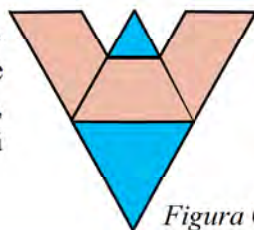


Figura 60

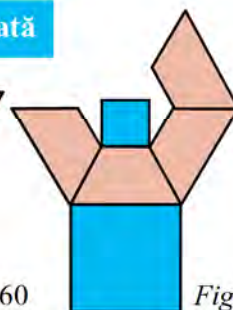


Figura 61

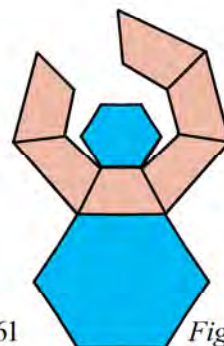


Figura 62



Aria laterală și aria totală a trunchiului de piramidă regulată

Definiții

- Suma ariilor fețelor laterale ale unui trunchi de piramidă se numește *aria laterală* a trunchiului de piramidă.
- Suma ariilor tuturor fețelor unui trunchi de piramidă se numește *aria totală* a trunchiului.

Notăm aria laterală cu $\mathcal{A}_l$, aria totală cu $\mathcal{A}_t$ și ariile bazelor cu $\mathcal{A}_B$ (aria bazei mari) și $\mathcal{A}_b$ (aria bazei mici). Mai notăm cu L latura bazei mari, cu l latura bazei mici și cu a_t apotema trunchiului.

Deoarece fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze congruente, ariile lor sunt egale. Aria unei fețe laterale este $\frac{(L+l) \cdot a_t}{2}$. Deci, pentru un trunchi de piramidă ale cărui baze sunt poligoane cu n laturi, avem $\mathcal{A}_l = n \cdot \frac{(L+l) \cdot a_t}{2} = \frac{(nL + nl) \cdot a_t}{2}$. Cum $n \cdot L = \mathcal{P}_B$ (perimetrul bazei mari) și $n \cdot l = \mathcal{P}_b$ (perimetrul bazei mici), obținem formula:

$$\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t}{2}$$

Are loc relația evidentă:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$$



Volumul trunchiului de piramidă regulată

Ne propunem să găsim o formulă pentru calculul volumului unui trunchi de piramidă în funcție de înălțime și ariile celor două baze.

Fie S , vârful piramidei din care provine trunchiul și h' , distanța de la S la planul bazei mici. În figura 63 am reprezentat un trunchi de piramidă patrulateră și piramida din care provine, dar raționamentul este valabil pentru orice trunchi de piramidă. Volumul trunchiului este egal cu diferența volumelor celor două piramide, deci $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_B (h + h') - \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h' = \frac{1}{3} \mathcal{A}_B \cdot h + \frac{1}{3} h' (\mathcal{A}_B - \mathcal{A}_b)$, (1).

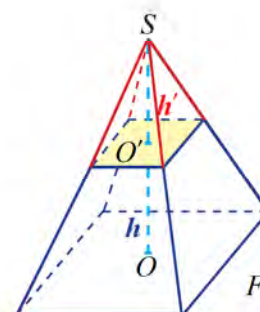


Figura 63

Dar $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} = \left(\frac{h'}{h+h'}\right)^2$, deci $\frac{h'}{h+h'} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}}$, de unde $h'(\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}) = h\sqrt{\mathcal{A}_b}$. Înmulțind ambii membri ai acestei relații cu $(\sqrt{\mathcal{A}_B} + \sqrt{\mathcal{A}_b})$, obținem $h'(\mathcal{A}_B - \mathcal{A}_b) = h(\sqrt{\mathcal{A}_B} \cdot \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_b)$. Înlocuind în relația (1), obținem formula volumului trunchiului de piramidă:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot h (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$$



Problemă rezolvată

Se consideră $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu înălțimea $SO = 12$ cm și $AB = 24$ cm. Considerăm $O' \in SO$, astfel încât $SO' = 6$ cm și $O'' \in (SO')$. Prin O' și O'' se duc planele $(A'B'C')$ și $(A''B''C'')$ paralele cu (ABC) , ($A' \in SA$, $A'' \in SA$, $B' \in SB$, $B'' \in SB$, $C' \in SC$, $C'' \in SC$).

Știind că: $\frac{\mathcal{V}_{ABCA'B'C'}}{\mathcal{V}_{A''B''C''A''B''C''}} = \frac{189}{19}$, calculează:

- înălțimea piramidei $SA''B''C''$;
- apotema trunchiului de piramidă $ABCA'B'C'$.



Soluție a) Notăm $V = \mathcal{V}_{SABC}$, $V' = \mathcal{V}_{SA'B'C'}$ și $V'' = \mathcal{V}_{SA''B''C''}$. Avem $\frac{V'}{V} = \left(\frac{6}{12}\right)^3 = \frac{1}{8}$, de unde $V' = \frac{1}{8}V$. Relația dată în ipoteză devine: $\frac{V - V'}{V' - V''} = \frac{189}{19}$.

De aici găsim: $V'' = \frac{1}{27}V$ și din relația $\frac{V'}{V} = \left(\frac{SO''}{SO}\right)^3$, obținem $SO'' = 4$ cm (vezi figura 64).

b) Dacă M și M' sunt mijloacele laturilor AB , respectiv $A'B'$, avem $OM = 4\sqrt{3}$ cm, $OO' = 6$ cm, iar $O'M' = \frac{1}{2}OM = 2\sqrt{3}$.

Din $MM'^2 = OO'^2 + (OM - O'M')^2$, obținem: $MM' = 4\sqrt{3}$ cm.

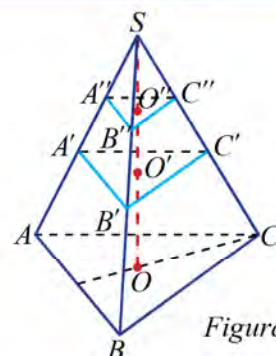


Figura 64


FIXARE
EXERSARE

PROBLEME



- 1** Copiază și completează tabelul de mai jos, unde L , l , h , m , a_l , $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă latura bazei mari, latura bazei mici, înălțimea, muchia laterală, apotema, aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată.

L	l	h	m	a_l	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
6	4			5			
	6	1		2			
	4		13	12			
4	2						$14\sqrt{3}$
6					75	$75 + 13\sqrt{3}$	

- 2** Se consideră $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată. Punctele O și O' sunt centrele de greutate ale bazelor ABC , respectiv $A'B'C'$.
Știind că $AB = 8$ cm, $A'B' = 6$ cm, $AA' = \frac{2\sqrt{39}}{3}$, calculează:
a) aria totală a trunchiului;
b) volumul piramidei din care provine trunchiul;
c) distanțele de la punctele O și O' la planul (BCC') .
- 3** În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABC A'B'C'$ avem $AB = 6$ cm, $A'B' = 3$ cm și $AC' = \sqrt{37}$ cm. Calculează:
a) înălțimea trunchiului de piramidă;
b) volumul piramidei din care provine trunchiul;
c) distanța de la punctul A la planul (BCC') .
- 4** În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ latura bazei mari $AB = 24$ cm, latura bazei mici $A'B' = 12$ cm, iar diagonalele unei fețe laterale sunt perpendiculare. Calculează:
a) aria laterală și aria totală a trunchiului;
b) volumul trunchiului;
c) tangenta unghiului făcut de planul unei fețe laterale cu planul bazei mici.
- 5** a) Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Să se arate că, dacă $\text{tg}(\angle(AA', (ABC))) = 1$, atunci $\text{tg}(\angle((BCC'B'), (ABC))) = 2$.
b) Calculează volumul trunchiului de piramidă cu proprietatea de la punctul a), în ipoteza că latura bazei mari $AB = 12$ cm și $AA' = 2\sqrt{6}$ cm.



- 6** O bomboană de ciocolată are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Laturile bazelor sunt de 6 cm, respectiv 3 cm, iar înălțimea trunchiului este 1,5 cm.

- Calculează volumul bomboanei.
- Bomboana se învelește într-o folie (toate fețele inclusiv bazele). Stabilește dacă o folie cu aria 86 cm^2 este suficientă pentru învelirea bomboanei.
- Determină unghiul dintre o față laterală a bomboanei și planul bazei mari.

- 7** O bomboană de ciocolată are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Se știe că $AB = 4 \text{ cm}$, $A'B' = 3 \text{ cm}$ și $AA' = \frac{\sqrt{39}}{3} \text{ cm}$.

- Arată că înălțimea trunchiului este egală cu 2 cm.
- Calculează volumul bomboanei.
- Află masa bomboanei, știind că densitatea ciocolatei este $1,3 \text{ g/cm}^3$ (se va folosi aproximarea $\sqrt{3} \approx 1,7$).

- 8** În figura 65 reprezentăm trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ are baza mare $ABCD$, valoarea tangentei unghiului $A'AC$ este egală cu $\frac{3}{2}$, $AB = 12 \text{ cm}$ și $A'C' = 8\sqrt{2} \text{ cm}$.

Calculează:

- Volumul trunchiului de piramidă.
- Aria laterală a trunchiului.
- Fie P un punct situat pe muchia BB' . Calculează lungimea segmentului BP , astfel încât aria triunghiului APC să fie minimă.

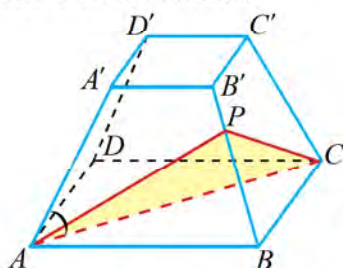


Figura 65

- 9** O piesă metalică în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari de 16 cm, latura bazei mici de 4 cm și muchia laterală de 10 cm.

- Arată că înălțimea piesei este egală cu $2\sqrt{7} \text{ cm}$.
- Ce cantitate de vopsea este necesară pentru vopsirea piesei, dacă pentru 1 cm^2 de suprafață se folosesc 0,5 g de vopsea?
- Cât cântărește piesa după vopsire, dacă densitatea metalului este $1,5 \text{ g/cm}^3$ (se va folosi pentru $\sqrt{7}$ valoarea aproximativă 2,6).

- 10** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari de 16 cm, latura bazei mici de 8 cm și aria totală a piramidei din care provine trunchiul de 576 cm^2 . Calculează:

- aria totală a trunchiului;
- volumul trunchiului de piramidă.

- 11** O prăjitură are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu muchiile bazelor de 18 cm, respectiv 6 cm și muchia laterală 8 cm.

- Calculează aria laterală și volumul prăjiturii.
- Calculează măsura unghiului dintre muchia laterală și planul bazei mari.

- 12** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu baza mare $ABCD$ are $AB = 8 \text{ cm}$ și $A'B' = 4 \text{ cm}$. O față laterală a trunchiului face cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 45° .

Calculează:

- aria laterală a trunchiului;
- măsura unghiului dintre două fețe laterale opuse ale trunchiului;
- distanța de la punctul A la planul (BCC') ;
- tangenta unghiului dintre două fețe laterale alăturate.

- 13** Se consideră un trunchi de piramidă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ în care $AB = 8 \text{ cm}$, înălțimea $OO' = 3 \text{ cm}$ și măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei mari de 60° .

Calculează:

- aria laterală a trunchiului;
- volumul trunchiului;
- distanța de la punctul A la planul (DEE') ;
- sinusul unghiului format de fețele (ABB') și (DEE') .

- 14** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABC A'B'C'$ are raza cercului circumscris bazei mari egală cu $4\sqrt{3} \text{ cm}$, raza cercului circumscris bazei mici egală cu $2\sqrt{3} \text{ cm}$ și $AA' = 4 \text{ cm}$ (vezi figura 66).

- Calculează lungimea înălțimii trunchiului de piramidă.
- Calculează volumul piramidei din care provine trunchiul.

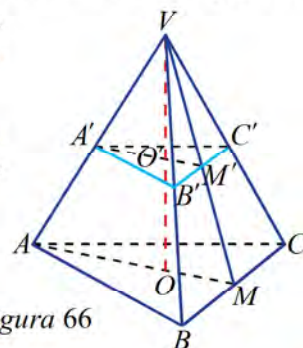


Figura 66

LECȚIA 8

Aria și volumul trunchiului de con circular drept


Descrierea trunchiului de con circular drept
Elementele trunchiului de con circular drept

Dacă secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza sa și îndepărtăm conul mic care se obține, corpul rămas este un trunchi de con circular drept.

Trunchiul de con circular drept este un corp de rotație. Considerăm o suprafață patrulateră mărginită de trapezul dreptunghic $AOO'B$. Rotind suprafața în jurul dreptei suport a înălțimii OO' , se obține un trunchi de con (vezi figura 67).

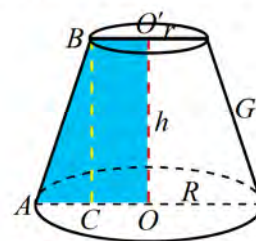


Figura 67

- Dreapta OO' reprezintă axa trunchiului de con (axa de rotație).
- Bazele trunchiului de con sunt discurile de centre O și O' și raze OA , respectiv $O'B$. Aceste discuri sunt situate în plane perpendiculare pe axă, deci planele bazelor sunt paralele. Notăm $AO = R$ și $O'B = r$.
- Segmentul AB și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Notăm lungimea generatoarei cu G .
- Distanța dintre planele bazelor se numește înălțime. Notăm înălțimea trunchiului de con cu h .

Fie C proiecția punctului B pe AO . Aplicând teorema lui *Pitagora* în triunghiul ABC , obținem relația:

$$G^2 = (R - r)^2 + h^2$$


Desfășurarea trunchiului de con circular drept
Aria laterală și aria totală a trunchiului de con circular drept

Desfășurăm pe un plan suprafața laterală a unui trunchi de con și suprafața laterală a conului din care provine trunchiul (vezi figura 68). Din asemănarea triunghiurilor $VO'B'$ și VOB , avem

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{r}{R}, \text{ de unde, din } VB - VB' = G, \text{ găsim } VB = \frac{R \cdot G}{R - r} \text{ și } VB' = \frac{r \cdot G}{R - r}.$$

Aria laterală a trunchiului de con este diferența dintre aria laterală a conului mare și aria laterală a conului mic, deci $\mathcal{A}_l = \pi \cdot VB \cdot R - \pi \cdot VB' \cdot r$. Înlocuind valorile lui VB și VB' , obținem formula:

$$\mathcal{A}_l = \pi G(R + r)$$

Aria totală a trunchiului de con circular drept este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$$

$$\text{Adică } \mathcal{A}_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

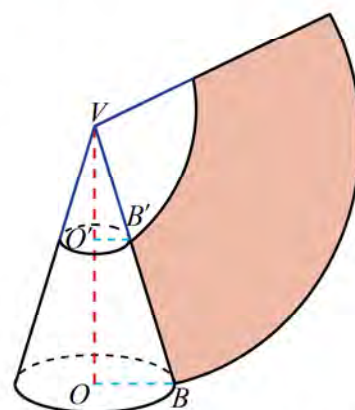


Figura 68

Observație

Formal, putem obține formula ariei laterale a trunchiului de con circular drept, pornind de la formula ariei laterale a trunchiului de piramidă regulată $\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t}{2}$, în care înlocuim perimetrele bazelor cu lungimile cercurilor, iar apotema trunchiului de piramidă, cu generatoarea trunchiului de con.



⇒ Volumul trunchiului de con circular drept

Volumul trunchiului de con circular drept se calculează după aceeași formulă ca și a trunchiului de piramidă:

$$V = \frac{h}{3}(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$$

Înlocuind $\mathcal{A}_B = \pi R^2$ și $\mathcal{A}_b = \pi r^2$, obținem:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

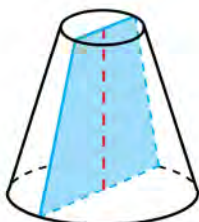
⇒ Secțiuni în trunchiul de con circular drept: secțiuni paralele cu baza și secțiuni axiale

Intersecția nevidă a unui trunchi de con circular drept cu un plan paralel cu baza este un disc (vezi figura 69).



Figura 69

Figura 70



Intersecția unui trunchi de con circular drept cu un plan care conține axa conului se numește *secțiune axială* în trunchiul de con. Această secțiune este o suprafață patrulateră mărginită de un trapez isoscel (vezi figura 70).



Probleme rezolvate

- 1 Se consideră $ABB'A'$ o secțiune axială a unui trunchi de con circular drept. În cercul de diametru AB , ducem coarda CD , astfel încât $AB \parallel CD$ (vezi figura 71). Dacă $AB = 20$ cm, $A'B' = CD = 12$ cm, iar măsura unghiului format de planele $(CDB'A')$ și $(ABB'A')$ este de 30° , calculează:
- aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con;
 - distanța de la centrul bazei mari la planul $(A'B'C')$.

Soluție a) Fie M mijlocul lui CD , deci $OM \perp CD$, rezultă $O'M \perp CD$. În triunghiul dreptunghic OMD , $OM = 8$ cm, apoi din triunghiul MOO' ($\angle MO'O = 30^\circ$), $O'M = 16$ cm și $h = OO' = 8\sqrt{3}$ cm. Cunoaștem $R = 10$ cm, $r = 6$ cm.

Din formula $G^2 = h^2 + (R - r)^2$, determinăm $G = 4\sqrt{13}$ cm.

$$\text{Avem } \mathcal{A}_l = 64\sqrt{13}\pi \text{ cm}^2, \mathcal{A}_t = 8\pi(8\sqrt{13} + 17) \text{ cm}^2, V = \frac{1568\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

b) Distanța cerută este înălțimea din O a triunghiului dreptunghic $OO'M$, deoarece $(OMO') \perp (CDB'A')$, deci este egală cu $\frac{OO' \cdot OM}{O'M} = 4\sqrt{3}$ cm.

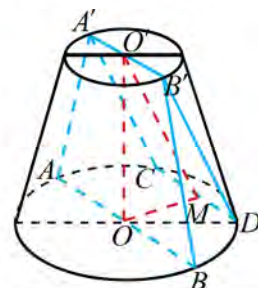


Figura 71

- 2 Un trunchi de con circular drept are razele bazelor $R = 29$ cm, $r = 5$ cm și perimetrul secțiunii axiale egal cu 118 cm. Calculează volumul trunchiului de con (vezi figura 72).

Soluție Fie $ABB'A'$ o secțiune axială. Cum $AB = 58$ cm, $A'B' = 10$ cm, $AA' = BB'$ și $P_{ABB'A'} = 118$ cm, obținem $AA' = BB' = 25$ cm. Construim $A'M \perp AB$ și $B'N \perp AB$, $M, N \in AB$. Rezultă că $A'B'NM$ este dreptunghi, deci $MN = A'B' = 10$ cm și, prin urmare, $AM = BN = 24$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $A'MA$ ($\angle A'MA = 90^\circ$), obținem $A'M = 7$ cm.

$$V_{tr, con} = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) = 2359\pi \text{ cm}^3.$$

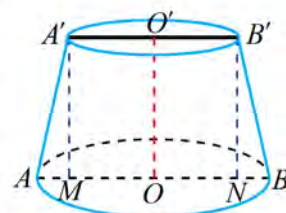


Figura 72


FIXARE
EXERSARE
CONSOLIDARE

PROBLEME



- 1 Copiază și completează tabelul următor în care R , r , h , G , $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă raza bazei mari, raza bazei mici, înălțimea, generatoarea, aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de con circular drept.

R	r	h	G	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
10	4		10			
8	5	6				
12			10	160π		
	5	35	37			
5	3					49π

- 2 În figura 73 este reprezentată o găleată de forma unui trunchi de con cu raza bazei mici $OA = 8$ cm, raza bazei mari $O'A' = 10$ cm și înălțimea 42 cm. Toarta este un semicerc cu diametrul $A'B'$.
- Calculează lungimea pe care o are toarta.
 - Determină câți litri de apă încap în găleată, considerând aproximarea lui π cu 3.
 - Calculează aria suprafeței laterale a găleții.

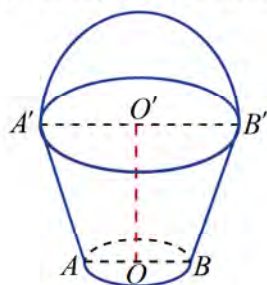


Figura 73

- 3 Un trunchi de con circular drept are raza mică de 4 cm, înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi de 60° . Calculează:
- aria laterală a trunchiului;
 - volumul trunchiului;
 - distanța de la centrul bazei mari la o generatoare.
- 4 Un buștean în formă de trunchi de con circular drept are diametrul bazei mari de 30 cm, diametrul bazei mici de 24 cm și lungimea de 4 m. Calculează volumul bușteanului cu o eroare mai mică de o zecime.

- 5 Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari egală cu 20 cm, raza bazei mici egală cu 10 cm și generatoarea egală cu 20 cm.
- Calculează măsura unghiului dintre generatoare și planul bazei mici.
 - Calculează aria laterală a conului din care provine trunchiul.
 - Calculează măsura unghiului sectorului de cerc care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul.
- 6 Într-un trunchi de con circular drept lungimea razei bazei mari, lungimea razei bazei mici și lungimea înălțimii sunt direct proporționale cu numerele 3, 2, respectiv $\sqrt{3}$, iar generatoarea este de 8 cm.
- Calculează aria totală și volumul trunchiului de con.
 - Fie punctul S situat pe înălțimea OO' a trunchiului de con, astfel încât volumul conului de vârf S și bază discul de centru O' să fie egal cu volumul conului de vârf S și bază discul de centru O . Calculează lungimea segmentului SO .
- 7 Secțiunea axială $ABCD$ a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare și cu baza mare $AB = 12$ cm. Înălțimea conului din care provine trunchiul este egală cu 12 cm.
- Calculează aria laterală a trunchiului.
 - Calculează volumul trunchiului.
 - Arată că măsura unghiului sectorului de cerc, care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul este mai mică decât 161° .
 - Arată că lungimea celui mai scurt drum dintre punctele A și B parcurs pe suprafața laterală a trunchiului este mai mică decât 19 cm.
- 8 Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Lungimea bazei mari a trapezului este de 12 cm, iar lungimea bazei mici este de 4 cm. Calculează:
- aria laterală a trunchiului de con;
 - volumul conului din care provine trunchiul;
 - distanța de la centrul bazei mici la o generatoare a trunchiului de con.



LECȚIA 9

Aria și volumul sferei



Sfera și corpul sferic

Numeroase obiecte din realitatea înconjurătoare au formă sferică. Un balon de săpun este un exemplu de sferă. O bilă de la rulmenți este un exemplu de corp sferic. Pământul (ca și celelalte planete) are aproximativ formă de corp sferic. Definiția sferei este asemănătoare cu a cercului, în timp ce definiția corpului sferic este asemănătoare definiției discului.



Moon-Shaped Resort, Dubai.



Definiții

- Fiind dat un punct O și un număr real $R > 0$, se numește *sferă* de centru O și rază R mulțimea punctelor M din spațiu cu proprietatea $OM = R$.
- Punctele M cu proprietatea $OM < R$ formează *interiorul sferei*, iar punctele M cu proprietatea $OM > R$ formează *exteriorul sferei*.
- Reuniunea dintre sferă și interiorul sferei se numește *corp sferic* sau *bilă*.

Deci corpul sferic de centru O și rază R este mulțimea punctelor M din spațiu cu proprietatea $OM \leq R$. Sfera și corpul sferic sunt corpuri de rotație. Sfera se poate obține rotind un cerc în jurul unui diametru al său.

De exemplu, prin rotirea unui cerc meridian în jurul axei Pământului, acesta descrie suprafața Pământului, care are aproximativ formă sferică (vezi figura 74). Dacă un disc se rotește în jurul unui diametru al său, se obține un corp sferic (vezi figura 75).

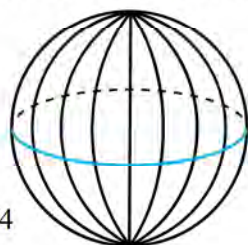


Figura 74

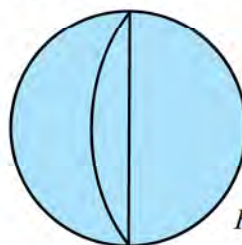


Figura 75

Dacă o dreaptă care trece prin centrul sferei o intersectează în punctele A și B , atunci AB este un diametru al sferei, iar punctele A și B sunt puncte diametral opuse.



Aria sferei și volumul corpului sferic

- Aria sferei este egală cu suma ariilor a patru discuri mari ale sferei:

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2$$

- Volumul corpului sferic de rază R este dat de formula:

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Observație

Corpul sferic este un corp plin, în timp ce sfera reprezintă suprafața corpului sferic. De aceea, vorbim de aria sferei și volumul corpului sferic, dar pentru simplitatea exprimării, uneori în loc de volumul corpului sferic vom spune volumul sferei.


Problemă rezolvată

Pe o sferă cu aria de $676\pi \text{ cm}^2$ se consideră punctele A, B și C , astfel încât $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$ și $BC = 10 \text{ cm}$. Calculează:

- a) volumul corpului sferic; b) distanța de la centrul sferei la planul (ABC) .

Soluție a) Din $4\pi R^2 = 676\pi$, obținem $R = 13 \text{ cm}$, deci $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 13^3 = \frac{8788}{3}\pi \text{ cm}^3$. b) Avem $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (vezi figura 76), deci triunghiul ABC este dreptunghic în A . Intersecția planului (ABC) cu sfera este cercul circumscris triunghiului ABC . Raza acestui cerc este $\frac{BC}{2} = 5 \text{ cm}$, iar centrul este mijlocul M al ipotenuzei. Distanța de la punctul O la planul (ABC) este $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 12 \text{ cm}$.

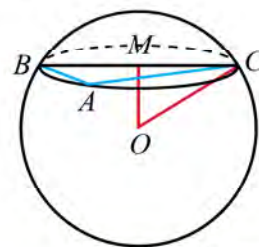


Figura 76


FIXARE
EXERSARE
CONSOLIDARE
PROBLEME


- 1 Calculează aria și volumul unei sfere cu raza egală cu 3 cm.
- 2 Calculează aria unei sfere care are volumul egal cu $288\pi \text{ cm}^3$.
- 3 Calculează aria unei sfere care are aria și volumul exprimate prin același număr.
- 4 O bilă de fier cu raza de 8 cm se nichează cu un strat gros de 2 mm. Câți cm^3 de nichel se consumă?
- 5 Aproximativ trei sferturi din suprafața globului este acoperită cu apă. Câte milioane de km^2 din suprafața globului formează uscatul, știind că raza pământului este de aproximativ 6 400 km?
- 6 Opt bile uzate cu raza de 1 cm se topesc pentru a turna o bilă mai mare. Calculează câți mililitri de vopsea sunt necesari pentru a vopsi bila obținută după turnare, știind că 1 l de vopsea acoperă 2 m^2 .
- 7 Figura 77 reprezintă un cornet de înghețată împreună cu o cupă de înghețată semisferică. Triunghiul ABC este echilateral cu perimetrul de 36 cm.
 - a) Determină lungimea laturii AB .

- b) Calculează volumul cupei de înghețată.
- c) Compară suprafața cornetului cu suprafața cupei de înghețată.

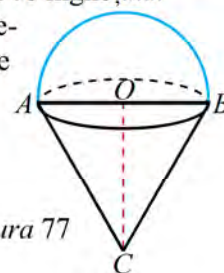


Figura 77

- 8 O bilă sferică având volumul $\frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3$ se taie după două plane paralele, de o parte și de alta a centrului sferei, lungimile cercurilor de secțiune fiind $12\pi \text{ cm}$, respectiv $16\pi \text{ cm}$ (vezi figura 78).
 - a) Calculează raza sferei.
 - b) Calculează distanțele de la centrul sferei la cele două plane de secțiune.
 - c) Ce procent din volumul sferei reprezintă suma volumelor celor două conuri cu vârfurile în centrul sferei și bazele cele două cercuri de secțiune?

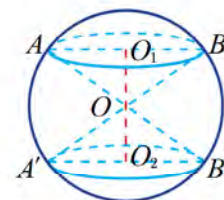
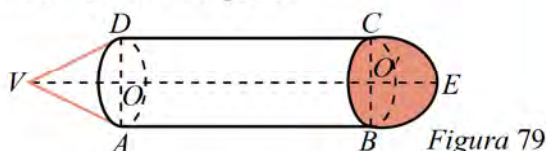


Figura 78



- 9 Un creion neascuțit are forma unui cilindru circular drept cu generatoarea de 20 cm și raza de 5 mm. Se ascute creionul, vârful ascuțit având forma unui con circular drept cu generatoarea de 13 mm.
- Calculează volumul creionului neascuțit.
 - Calculează volumul creionului ascuțit.
 - Cât la sută din volumul creionului s-a îndepărtat prin ascuțire?

- 10 O piesă metalică, obținută prin alăturarea unui con, a unui cilindru și a unei semisfere, este reprezentată în figura 79. Se știe că: $VE = 16$ cm, $VO = 5$ cm și $BC = 6$ cm.
- Determină înălțimea cilindrului și generatoarea conului.
 - Calculează aria piesei.
 - Calculează volumul piesei.



- 11 În figura 80 este reprezentat un suport cilindric pentru mingi de tenis de câmp. Mingile au formă sferică, cu raza de 3 cm, iar în interiorul suportului încap trei mingi, care ocupă la maximum suportul.

- Determină înălțimea suportului.
- Demonstrează că aria totală a suportului este 126π cm².
- Ce procent din volumul suportului este ocupat de cele trei mingi?

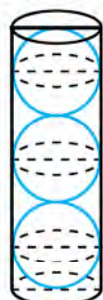


Figura 80

- 12 În figura 81 este reprezentată schematic o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu capacul de forma unei jumătăți de cilindru. Se știe că: $AB = 80$ cm, $BC = 40$ cm și $AE = 60$ cm.

- Calculează volumul cutiei.
- Stabilește dacă în această cutie încap o baghetă cu lungimea de 1,1 m.
- Calculează aria totală a cutiei.

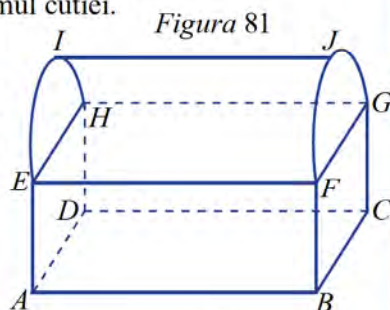


Figura 81

- Determină raza minimă a unei sfere în care este inclusă cutia.

- 13 O sferă are volumul egal cu 972π cm³. Calculează aria sferei.

- 14 O sferă are aria egală cu 196π cm². Calculează volumul sferei.

- 15 O sferă cu raza de 26 cm este secționată cu un plan. Știind că cercul de secțiune are aria egală cu 100π cm², calculează distanța de la centrul sferei la planul de secțiune (vezi figura 82).

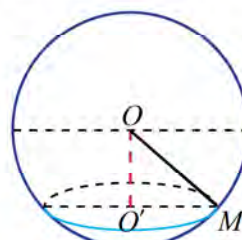


Figura 82

- 16 Dintr-un cub de lemn cu muchia de 10 cm, se ciopește o bilă (vezi figura 83). Știind că bila are raza cât mai mare posibil, calculează:

- aria bilei;
- diferența dintre volumul cubului și volumul bilei.

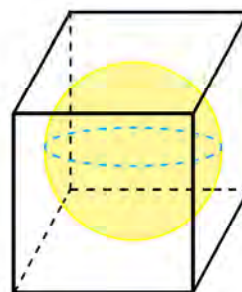


Figura 83

- 17 Un acvariu având dimensiunile $L = 50$ cm, $l = 40$ cm și $h = 60$ cm este umplut cu apă până la jumătate. În acvariu se introduc 5 bile identice, cu raza egală cu 2 cm. Calculează până la ce înălțime se va ridica apa în acvariu după introducerea celor 5 bile.

- 18 Pe suprafața unei sfere se consideră punctele M , N și P , astfel încât $MN = 13$ cm, $MP = 12$ cm și $NP = 5$ cm (vezi figura 84). Știind că planul (MNP) conține centrul sferei, calculează aria și volumul sferei.

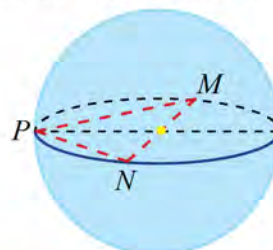


Figura 84



TESTUL 1

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE DE AUTOEVALUARE

Recomandate pentru portofoliul personal

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are razele cercurilor circumscrise bazelor egale cu $4\sqrt{3}$ cm și $2\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea trunchiului este de 10 cm. Volumul trunchiului este ... cm^3 .
- 5p 2 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are diagonalele bazelor de 12 cm, respectiv 4 cm și muchia laterală $4\sqrt{5}$ cm. Volumul trunchiului este ... cm^3 .
- 5p 3 Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are latura bazelor 8 cm și 6 cm, iar fețele laterale fac cu planul bazei mari unghiuri de 60° . Aria laterală a trunchiului este ... cm^2 .
- 5p 4 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are apotemele bazelor de 4 dm, respectiv 2 dm și apotema de 6 dm. Aria totală este ... dm^2 .
- 5p 5 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria laterală 352 cm^2 , aria bazei mici 100 cm^2 și apotema 8 cm. Aria bazei mari este ... cm^2 .
- 5p 6 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari egală cu 24 cm, latura bazei mici 6 cm, iar înălțimea 12 cm. Lungimea înălțimii piramidei din care provine trunchiul este ... cm.

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Într-o piramidă triunghiulară regulată cu volumul 27 dm^3 , se face o secțiune paralelă cu baza la $\frac{1}{3}$ din înălțime față de vârf. Volumul trunchiului de piramidă obținut este egal cu:
A. 18 dm^3 B. 9 dm^3 C. 3 dm^3 D. 26 dm^3
- 5p 2 O piramidă hexagonală regulată cu aria laterală 64 cm^2 se secționează cu un plan paralel cu baza care trece prin mijlocul înălțimii. Aria laterală a trunchiului de piramidă obținut după înlăturarea piramidei mici este egală cu:
A. 32 cm^2 B. 16 cm^2 C. 48 cm^2 D. 60 cm^2
- 5p 3 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari egală cu 24 cm, latura bazei mici egală cu 8 cm și înălțimea egală cu 6 cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu:
A. 80 cm^2 B. 160 cm^2 C. 320 cm^2 D. 640 cm^2
- 5p 4 Un vas în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari 30 cm, latura bazei mici 20 cm și înălțimea 80 cm. Capacitatea vasului în litri este:
A. 19 l B. 57 l C. 20 l D. 1300 l
- 5p 5 $ABCD A' B' C' D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $A' B' = 6\sqrt{2}$ cm și $AC' \perp A' C$. Volumul trunchiului de piramidă este:
A. $3\,024 \text{ cm}^3$ B. $6\,048 \text{ cm}^3$ C. $6\,048\sqrt{2} \text{ cm}^3$ D. $3\,024\sqrt{2} \text{ cm}^3$
- 5p 6 O piramidă triunghiulară regulată este secționată cu un plan paralel cu baza, obținând astfel o piramidă mai mică cu volumul $10\sqrt{3} \text{ cm}^3$ și un trunchi de piramidă cu volumul $70\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Raportul dintre aria laterală a piramidei mici și aria laterală a trunchiului este:
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{8}$

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are volumul de 124 cm^3 , latura bazei mari de 10 cm și înălțimea de 3 cm.

- 10p a) Calculează lungimea laturii bazei mici.
- 10p b) Calculează aria laterală a trunchiului.
- 10p c) Calculează distanța de la centrul bazei mari la planul unei fețe laterale.



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera **A**, în caz contrar, încercuiește litera **F** (20 de puncte).

- 5p 1 Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este egală cu 84 cm. Aria unei fețe a cubului este egală cu 49 cm^2 .
 A F
- 5p 2 Aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate este egală cu 72 cm^2 . Dacă lungimea apotemei piramidei este egală cu 8 cm, atunci lungimea laturii bazei este egală cu 6 cm.
 A F
- 5p 3 Un cilindru circular drept are secțiunea axială un pătrat cu aria egală cu 36 cm^2 . Volumul cilindrului este egal cu $54\pi \text{ cm}^3$.
 A F
- 5p 4 Generatoarea unui con circular drept are lungimea de 10 cm și formează cu planul bazei conului un unghi de 45° . Aria totală a conului este egală cu $50\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$.
 A F

SUBIECTUL al II-lea. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect din coloana **B** (20 de puncte).

Se consideră prisma patrulateră regulată $MNPQRSTU$, $MN = 8 \text{ cm}$, $MP = 10 \text{ cm}$, $RM = 5 \text{ cm}$ și $\{O\} = RT \cap SU$ (vezi figura 85).

- 5p 1 Aria laterală a prisme $MNPQRSTU$ este egală cu ... cm^2 .
- 5p 2 Aria totală a prisme $MNPQRSTU$ este egală cu ... cm^2 .
- 5p 3 Volumul prisme $MNPQRSTU$ este egal cu ... cm^3 .
- 5p 4 Volumul piramidei $OMNPQ$ este egal cu ... cm^3 .

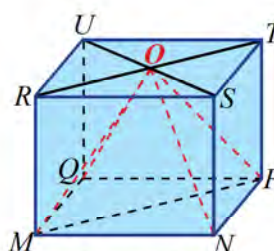


Figura 85

B

- a. 236
 b. 240
 c. 120
 d. 80
 e. 140

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (50 de puncte).

- 1 În figura 86 este reprezentată prisma dreaptă $ABCDEF$, cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 6 \text{ cm}$ și $AD = 9 \text{ cm}$.
- 10p a) Arată că aria totală a prisme este mai mică decât 198 cm^2 .
- 10p b) Calculează volumul prisme.
- 2 În figura 87 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$, având vârful V și baza $ABCD$. Aria bazei este egală cu 36 cm^2 , iar planul (VBC) formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60° .
- 10p a) Arată că aria laterală a piramidei este egală cu 72 cm^2 .
- 10p b) Calculează volumul piramidei.
- 10p c) La o treime față de vârful piramidei ducem un plan, paralel cu planul (ABC) , care intersectează dreptele VA , VB , VC și VD în punctele A' , B' , C' , respectiv D' . Calculează volumul trunchiului de piramidă $ABCD A' B' C' D'$.

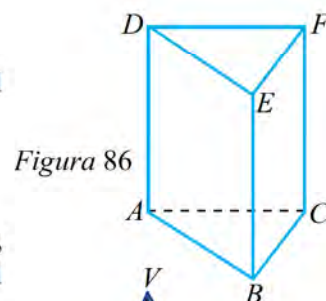


Figura 86

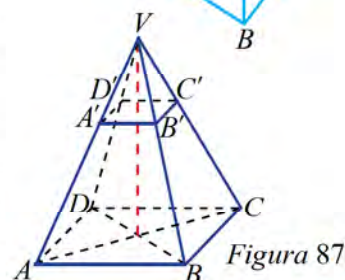


Figura 87

TESTUL 3

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte (30 de puncte).

- 5p 1 Un cilindru circular drept cu raza de 4 cm și generatoarea de 6 cm are volumul ... cm^3 .
- 5p 2 Un con circular drept cu raza de 6 cm și înălțimea 45 mm are volumul ... cm^3 .
- 5p 3 Un trunchi de con cu razele de 10 cm, respectiv 8 cm și generatoarea 9 cm are aria laterală ... cm^2 .
- 5p 4 O sferă cu raza $3\sqrt{2}$ cm are aria ... cm^2 .
- 5p 5 Un con circular drept are aria totală $48\pi \text{ cm}^2$ și aria laterală $32\pi \text{ cm}^2$. Raza conului are ... cm.
- 5p 6 Raza unei sfere cu volumul de $36\pi \text{ cm}^3$ are ... cm.

SUBIECTUL al II-lea. Precizează litera corespunzătoare răspunsului corect (30 de puncte).

- 5p 1 Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria 64 cm^2 . Aria laterală a cilindrului este:
A. $64\pi \text{ cm}^2$ B. $128\pi \text{ cm}^2$ C. 128 cm^2 D. 192 cm^2
- 5p 2 Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala $6\sqrt{2}$ cm. Volumul cilindrului este:
A. 54 cm^3 B. 108 cm^3 C. $\frac{54}{\pi} \text{ cm}^3$ D. 18 cm^3
- 5p 3 Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu aria $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Volumul conului este:
A. $15\pi \text{ cm}^3$ B. $54\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ C. $9\sqrt{3} \text{ cm}^3$ D. $9\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$
- 5p 4 Un con circular drept cu volumul $64\pi \text{ cm}^3$ se secționează cu un plan paralel cu baza care trece prin mijlocul înălțimii. Volumul trunchiului de con obținut este egal cu:
A. $56\pi \text{ cm}^3$ B. $32\pi \text{ cm}^3$ C. $64\pi \text{ cm}^3$ D. 32 cm^3
- 5p 5 Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Știind că razele lui sunt de 16 cm și 4 cm, atunci volumul trunchiului de con este:
A. 64 cm^3 B. $192\pi \text{ cm}^3$ C. $\frac{260}{3}\pi \text{ cm}^3$ D. $260\pi \text{ cm}^3$
- 5p 6 Dintr-o tablă în formă de semidisc cu raza de 16 cm, un tinichigiu construiește un vas în formă de con. Pentru a confecționa capacul vasului, el cumpără o bucată de tablă în formă de pătrat. Care este lungimea minimă a acesteia?
A. 8 cm B. 16 cm C. 32 cm D. 4 cm

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete (30 de puncte).

Un con circular drept are generatoarea de 40 cm. Desfășurarea suprafeței laterale este un sector de disc cu unghiul de 90° .

- 10p a) Calculează raza bazei conului.
- 10p b) Calculează volumul conului.
- 10p c) Demonstrează că aria laterală a conului este mai mare decât $1\,256 \text{ cm}^2$ și mai mică decât $1\,260 \text{ cm}^2$.

 Descarcă din manualul digital, apoi completează fișa de observare a unității.

RECAPITULARE FINALĂ

TESTUL 1

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

(30 de puncte)

- 5p 1 Rezultatul calculului $2 \cdot \sqrt{36} - 6 \cdot \sqrt{4}$ este ...
- 5p 2 Suma numerelor întregi din intervalul $[-2; 4)$ este ...
- 5p 3 Fie raportul $E(x) = \frac{3x^3 - 7}{4x^2 + 1}$, unde x este un număr real. Calculând $E(2)$ se obține ...
- 5p 4 Suma lungimilor muchiilor unui tetraedru regulat este egală cu 72 cm. Aria unei fețe a tetraedrului regulat este egală cu ... cm^2 .
- 5p 5 Dacă $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $VA = AB = 6$ cm, atunci înălțimea piramidei are lungimea de ... cm.
- 5p 6 În tabelul alăturat este prezentată repartitia elevilor unei clase a VIII-a, în funcție de mediile obținute la matematică:

Media	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	4	5	8	3	3	1

Numărul elevilor din această clasă care a obținut la matematică cel puțin media 7 este egal cu ...

SUBIECTUL al II-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1 Desenează pe foaia de rezolvare, o prismă dreaptă $MNPQRS$ cu baza triunghiului echilateral MNP .
- 5p 2 Calculează intersecția intervalelor $I = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$ și $J = \left(-1; \frac{3}{2}\right]$.
- 5p 3 Arată că numărul $a = (2\sqrt{3} - 4)^2 + (8 + \sqrt{3})^2$ este natural.
- 5p 4 Descompune în factori expresia: $2x^3 + 16x^2 + 32x$.
- 5p 5 Fie $R(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
- 5p a) Simplifică raportul $R(x)$.
- 5p b) Determină $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $R(x) \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1 Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 4$ dm. Notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor AB, AD , respectiv AA' .
- 5p a) Arată că aria triunghiului MNP este egală cu $2\sqrt{3} \text{ dm}^2$.
- 5p b) Demonstrează că planele (MNP) și $(A'BD)$ sunt paralele.
- 5p c) Verifică dacă, presupunând că acest cub este din carton, se poate introduce o baghetă metalică având lungimea de 7 dm.
- 5p 2 Rombul $ABEF$ și pătratul $ABCD$ sunt situate în plane diferite, $AB = 8$ cm, iar măsura unghiului $\widehat{ADF}$ este de 60° .
- 5p a) Calculează lungimea segmentului CE .
- 5p b) Arată că $CE \parallel (BDF)$.
- 5p c) Calculează măsura unghiului dintre dreptele AD și BE .



TESTUL 2

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

(30 de puncte)

- 5p 1 Rezultatul calculului $\sqrt{32} - 4\sqrt{2}$ este egal cu ...
- 5p 2 Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 3\}$ este intervalul ...
- 5p 3 Efectuând calculul $-3a + 4b - 5a - 6b$, obținem ...
- 5p 4 În cubul $ABCD A' B' C' D'$ măsura unghiului dintre dreptele BC' și $A'D$ este egală cu ...°
- 5p 5 Un tetraedru regulat cu muchia de 6 cm are aria unei fețe egală cu ... cm².
- 5p 6 Piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful V , are $VA = AB$. Măsura unghiului AVC este egală cu ...°

SUBIECTUL al II-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1 Desenează pe foaia de rezolvare tetraedrul $STAR$.
- 5p 2 Fie $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x - 1 \leq 3\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 1| \leq 5\}$. Calculează $A \cup B$ și $A \cap B$.
- 5p 3 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația: $2\sqrt{3}x - 4 \geq x\sqrt{15} - 2\sqrt{5}$.
- 5p 4 Se consideră $E = 3(a^2 + b^2) + 2(a - b) - 6ab$, unde a și b sunt numere reale. Știind că $a - b = 3$, calculează E .
- 5p 5 Fie $E(x) = (x + 2)^2 + 3(x - 3)(x + 3) - 3x(x + 2)$, unde x este număr real.
- 5p a) Demonstrează că $E(x) = x^2 - 2x - 23$.
- 5p b) Arată că $E(x) \geq -24, (\forall)x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1 Se consideră $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , $AB = 12\sqrt{2}$ cm și $VA = 20$ cm. Notăm cu E și F mijloacele muchiilor VA , respectiv VC , și cu O centrul bazei $ABCD$.
- 5p a) Arată că $VO = 16$ cm.
- 5p b) Calculează măsura unghiului dintre dreptele EF și BC .
- 5p c) Demonstrează că dreapta EF este perpendiculară pe planul (VBD) .
- 2 $ABCDEFGH$ este o prismă patrulateră regulată cu $AB = 6$ cm și $AE = 8$ cm. Fie M mijlocul segmentului CF și $AC \cap BD = \{O\}$.
- 5p a) Arată că $BH = 2\sqrt{34}$ cm.
- 5p b) Demonstrează că $OM \parallel (AFG)$.
- 5p c) Calculează distanța de la punctul B la planul (OMC) .



TESTUL 3

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

(30 de puncte)

- 5p 1 Rezultatul calculului $\sqrt{64} - \sqrt{100} : 5$ este ...
- 5p 2 Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x$, numărul $f(0) \cdot f(1) - f(2)$ este ...
- 5p 3 Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și punctul $M(3, m)$ aparține graficului funcției f , atunci valoarea lui m este ...
- 5p 4 Dacă într-o piramidă patrulateră regulată muchia bazei este de 20 cm și muchia laterală de 26 cm, atunci apotema piramidei este de ... cm.
- 5p 5 Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni 4 cm, 5 cm și 6 cm este egală cu ... cm^2 .
- 5p 6 În tabelul de mai jos este reprezentat numărul de cărți împrumutate de biblioteca școlii în ultimii 4 ani:

Anul	2021	2022	2023	2024
Numărul de cărți împrumutate	437	315	533	505

Numărul total de cărți împrumutate a fost de ... cărți.

SUBIECTUL al II-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1 Desenează pe foaia de rezolvare un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.
- 5p 2 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația: $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
- 5p 3 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2mx + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$. Află valoarea lui m , știind că punctul $P(1, 2\ 020)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 4 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$. Calculează $S = f(1) + f(2) + \dots + f(30)$.
- 5p 5 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 2x$.
- 5p a) Reprezintă grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy .
- 5p b) Calculează aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f , axa Ox și axa Oy .

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1 Se consideră $ABCD A' B' C' D'$ un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic. Baza $ABCD$ are $AB = 18$ m și $BC = 16$ m, iar înălțimea $AA' = 3$ m.
- 5p a) Arată că volumul bazinului este egal cu 324 m^3 .
- 5p b) Fețele laterale ale bazinului se plachează cu plăci de faianță, având forma unui pătrat de latură 40 cm. Determină numărul de plăci necesare.
- 5p c) În bazin se află 243 000 litri de apă. Calculează înălțimea la care se ridică apa în bazin.
- 5p 2 O prismă triunghiulară regulată $ABC A' B' C'$ are baza triunghiul ABC , muchia bazei egală cu 6 cm și înălțimea egală cu 8 cm.
- 5p a) Calculează lungimea segmentului AC' .
- 5p b) Calculează distanța de la punctul C' la planul (ABA') .
- 5p c) Determină sinusul unghiului dintre dreptele $A'B$ și $B'C$.



TESTUL 4

• Se acordă 10p din oficiu. • Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte.

(30 de puncte)

- 5p 1 Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $2x^2 + 3x = 0$ este ...
- 5p 2 O prismă patrulateră regulată are aria laterală 320 cm^2 și înălțimea de 10 cm. Latura bazei este egală cu ... cm.
- 5p 3 Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m-1)x + 3$, $m \in \mathbb{R}$. Dacă punctul $A(2, 5)$ aparține graficului lui f , m este egal cu ...
- 5p 4 Un cub are diagonala de $3\sqrt{3}$ cm. Aria totală a cubului este ... cm^2 .
- 5p 5 Un cilindru circular drept, cu generatoarea de 4 cm și aria secțiunii axiale de 48 cm^2 , are aria laterală egală cu ... cm^2 .
- 5p 6 În tabelul de mai jos este reprezentată o dependență funcțională:

x	-2	-1	a	4	6
$y = -2x + 3$			1	-5	b

Suma dintre numerele a și b este egală cu ...

SUBIECTUL al II-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 1 Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 5$. Notăm intersecția graficelor celor două funcții cu B , intersecția graficului funcției g cu axa Ox cu C , intersecția graficului funcției g cu axa Oy cu D și intersecția graficului funcției f cu axa Oy cu A .
- 5p a) Calculează aria patrulaterului $OABC$.
- 5p b) Determină ce procent reprezintă aria triunghiului DAB din aria triunghiului DOC .
- 5p c) Determină distanța de la originea sistemului de coordonate la reprezentarea grafică a funcției g .
- 5p 2 a) Demonstrează că $\frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -4\}$.
- 10p b) Rezolvă ecuația: $\frac{1}{x^2 + 6x + 9} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} = \frac{x+3}{x+5}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -4; -3\}$.

SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 1 Se consideră $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată, astfel încât măsura unghiului dintre dreapta VA și planul (ABC) este de 45° și $AB = 12 \text{ cm}$.
- 5p a) Determină aria totală a piramidei.
- 5p b) Determină distanța de la punctul A la planul (VBC) .
- 5p c) Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza, astfel încât aria laterală a trunchiului obținut să fie dublul ariei laterale a piramidei mici. Află volumul trunchiului.
- 2 Triunghiul isoscel VAB de bază AB este secțiunea axială a unui con circular drept cu raza bazei de 6 cm. Punctul C se află pe cercul bazei conului, astfel încât măsura arcului $\widehat{AC}$ este 120° . Se știe că unghiul dintre planul (VAC) și planul bazei conului este de 60° .
- 5p a) Arată că înălțimea conului este de $3\sqrt{3}$ cm.
- 5p b) Calculează aria laterală și volumul conului.
- 5p c) Calculează distanța de la punctul O la planul (VAC) , unde O este centrul bazei conului.

Descarcă din manualul digital, apoi completează fișa de observare a unității.



TESTE pentru pregătirea examenului de EVALUARE NAȚIONALĂ

TESTUL 1

• Toate subiectele sunt obligatorii.

• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p	1 Rezultatul calculului $4^6 : 2^8$ este: a) 8 b) 16 c) 10 d) 1
5p	2 Dintre numerele $x = \frac{5}{3}$, $y = 1,6$, $z = 1,7$ și $t = 1,5$, mai mare este numărul: a) x b) y c) z d) t
5p	3 Cel mai mare divizor comun al numerelor 108 și 180 este numărul: a) 36 b) 18 c) 48 d) 54
5p	4 Suma numerelor întregi din intervalul $(-3; 2]$ este egală cu: a) -3 b) 3 c) 0 d) 2
5p	5 Dacă $x^2 - y^2 = 12$ și $x - y = -3$, atunci $x + y$ este egal cu: a) -36 b) 36 c) 4 d) -4
5p	6 Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ și $a - \frac{1}{a} = 2$, atunci valoarea de adevăr a propoziției „$a^2 + \frac{1}{a^2} = 4$” este: a) adevărată b) falsă



5p	1 În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E (punctele B, C, D, E sunt coliniare). Distanța de la punctul A la dreapta BE este egală cu lungimea segmentului: a) AB b) AC c) AD d) AE	
5p	2 În figura alăturată punctele A, B și C sunt coliniare (în această ordine), iar M este mijlocul segmentului BC. Dacă $AB = 3$ cm, $MC = 2$ cm, atunci lungimea segmentului AC este egală cu: a) 5 cm b) 7 cm c) 9 cm d) 8 cm	
5p	3 În figura alăturată, dreptele a și b sunt tăiate de secanta d. Știind că $a \cap d = \{M\}$, $b \cap d = \{N\}$, $A \in a$, $B \in b$, $\widehat{AMN} = 2x - 10^\circ$, $\widehat{BNM} = 3x + 10^\circ$, valoarea lui x pentru care dreptele a și b sunt paralele este: a) 36° b) 72° c) 20° d) 40°	
5p	4 În figura alăturată $ABCD$ este un dreptunghi cu $AD = 12$ cm, $AB = 18$ cm și $E \in AB$ (E între A și B) astfel încât $AE = 0,6 \cdot AB$. Aria patrulaterului $BCDE$ este egală cu: a) 288 cm^2 b) 144 cm^2 c) 108 cm^2 d) 576 cm^2	
5p	5 Trapezul dreptunghic $PQRS$ ($PQ \parallel RS$, $\widehat{P} = \widehat{S} = 90^\circ$) are diagonalele perpendiculare. Dacă $PQ = 18$ cm și $RS = 8$ cm, atunci înălțimea trapezului are lungimea de: a) 12 cm b) 10 cm c) 14 cm d) 13 cm	
5p	6 Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de centru O. Măsura unghiului BOC este egală cu: a) 60° b) 90° c) 100° d) 120°	

2p 3p	1 Dan cumpără o minge folosind doar bancnote de 5 lei și 10 lei. Mingea costă 40 de lei. a) Este posibil ca Dan să folosească doar 3 bancnote? b) Știind că s-au folosit în total 5 bancnote, află câte bancnote de 5 lei și câte bancnote de 10 lei a folosit Dan.
2p 3p	2 Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{2x-6}{x^2-4x+3} - \frac{x-2}{x^2-4x+4} \right) : \frac{x-3}{x-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$. a) Arată că $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, pentru orice număr x. b) Demonstrează că $E(x) \cdot (x-2) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.
2p 3p	3 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$. a) Calculează $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$. b) Știind că reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctul E și axa Oy în punctul F, calculează sinusul unghiului $\widehat{OEF}$.
2p 3p	4 În figura alăturată este reprezentat un romb $MNPQ$ cu $MN = 6$ cm și $\widehat{MNP} = 120^\circ$. a) Arată că $NQ = 6$ cm. b) Calculează distanța de la punctul Q la dreapta NP.
2p 3p	5 În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AD = BC = 8$ cm și $AB = 2CD = 16\sqrt{3}$ cm. Notăm $\{P\} = AD \cap BC$ și deducem $CE \perp AB$, $E \in AB$. a) Arată că aria trapezului $ABCD$ este egală cu $48\sqrt{3}$ cm². b) Calculează lungimea segmentului PE.
2p 3p	6 Se dă piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu latura bazei $AB = 12$ cm, muchia laterală $VA = 8$ cm și M este mijlocul lui BC. a) Determină măsura unghiului dintre dreapta VA și planul (ABC). b) Calculează distanța de la punctul A la dreapta VM.

TESTUL 2

• Toate subiectele sunt obligatorii.

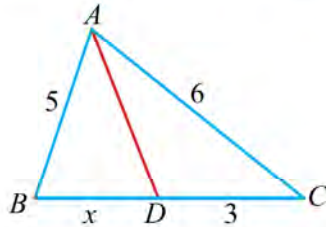
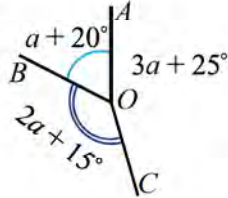
• Se acordă 10p din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 120 min.

SUBIECTUL I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p	1 Rezultatul calculului $(1 + 2 + 3 \cdot 4) : 5$ este: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
5p	2 Maria a cumpărat 2 kilograme de mere cu prețul de 3 lei kilogramul și 3 kilograme de banane cu prețul de 8 lei kilogramul. Un kilogram de fructe cumpărat de Maria a costat: a) 6 lei b) 8 lei c) 5 lei d) 4 lei
5p	3 Numărul natural m pentru care $3^{2m+1} = 243$ este: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
5p	4 Numărul $3 - \sqrt{2}$ aparține mulțimii: a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
5p	5 La un test Ana a obținut nota 8, Ionuț a obținut nota 9, iar Dan a obținut nota 7. Dacă Irina a luat nota x, iar media notelor celor patru copii a fost 8,5, atunci valoarea lui x este: a) 7 b) 8 c) 9 d) 10
5p	6 Suma modulelor numerelor întregi din intervalul $(-4; 3]$ este egală cu: a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

5p	1 În figura alăturată, triunghiurile ABD și ACD au același perimetru. Valoarea lui x este egală cu: a) 2 b) 3 c) 4 d) 5	
5p	2 În figura alăturată avem trei unghiuri în jurul punctului O: $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ și $\widehat{COA}$. Valoarea lui a este egală cu: a) 50° b) 60° c) 70° d) 80°	
5p	3 O bucătărie are forma unui dreptunghi cu lungimea 4,5 m și lățimea de 3 m. Bucătăria se plachează cu plăci de gresie, sub formă de pătrat, cu lungimea laturii egală cu 3 dm. Numărul plăcilor de gresie necesare pentru a acoperi întreaga bucătărie este: a) 1 500 b) 120 c) 180 d) 150	
5p	4 Triunghiul isoscel ABC are baza $BC = 10$ cm și $AB = AC = 13$ cm. Distanța de la punctul B la dreapta AC este egală cu: a) $\frac{120}{13}$ cm b) 120 cm c) 60 cm d) $\frac{100}{13}$ cm	
5p	5 Punctele M, N, P, Q sunt situate (în această ordine) pe cercul de centru O. Dacă $\widehat{MN} = 60^\circ$, $\widehat{NP} = 80^\circ$, $\widehat{PQ} = 130^\circ$, atunci măsura unghiului $\widehat{MOQ}$ este egală cu: a) 120° b) 70° c) 100° d) 90°	
5p	6 Un patinoar are forma unui dreptunghi $ABCD$ cu lungimea de 20 m și lățimea de 10 m. Ana patinează pe traseul $A \rightarrow B \rightarrow C$, iar Bogdan patinează pe traseul $A \rightarrow M \rightarrow C$, unde M este mijlocul lui BC. Afirmatia: „traseul parcurs de Ana este mai lung decât traseul parcurs de Bogdan” este: a) adevărată b) falsă	

5p	1 Maria așază flori în mai multe vase. Dacă pune câte 3 flori în fiecare vază, atunci toate vasele sunt pline, iar 5 flori nu au loc în vase. Dacă pune câte 5 flori în fiecare vază, atunci într-o vază sunt 2 flori, iar celelalte vase sunt pline. Câte flori și câte vase sunt?
2p 3p	2 Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 + x} \right) : \frac{1}{2x(x - 1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. a) Arată că $E(x) = \frac{4}{x + 1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. b) Determină cel mai mare număr natural n pentru care $E(n) \geq 1$.
2p 3p	3 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2 - \sqrt{5})x + \sqrt{5}$. a) Arată că punctul $A(1; 2)$ aparține graficului funcției. b) Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația: $f(x) - 2 \geq 0$.
2p 3p	4 Triunghiul ABC este dreptunghic în A , $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, M este mijlocul lui AC , iar $MN \perp BC$, $N \in BC$, $MN = 2$ cm. a) Arată că $\sin \widehat{C} = \frac{3}{5}$. b) Calculează aria patrulaterului $ABNM$.
2p 3p	5 În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Notăm cu M mijlocul segmentului OC , $DM \cap BC = \{N\}$, iar P este simetricul punctului N față de punctul M . a) Arată că dreptele OP și AD sunt paralele. b) Calculează raportul dintre aria patrulaterului $OPCN$ și aria paralelogramului $ABCD$.
2p 3p	6 Un garaj are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 3$ m, $BC = 6$ m și $BB' = 2,5$ m, iar acoperișul are forma unei prisme triunghiulare regulate $A' B' E D' C' F$ cu bazele $A' B' E$, respectiv $D' C' F$. Garajul se vopsește pe exterior, iar acoperișul este de tablă. a) Câte kilograme de vopsea sunt necesare, dacă 1 kg de vopsea acoperă 5 m^2 ? Cât costă vopseaua, știind că 1 kg de vopsea costă 25 de lei? (Se consideră $\sqrt{3} = 1,73$. Rezultatul se va scrie cu două zecimale exacte). b) Câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru a acoperi garajul, știind că pierderile sunt de 10% din suprafața acoperișului?

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

PROBLEME RECAPITULATIVE

1 $X \cap Y = \{1, 3, 5\}$, $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $X \setminus Y = \{2, 7\}$, $Y \setminus X = \{4, 6\}$. **2** Cazul I: $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Cazul II: $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Cazul III: $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Cazul IV: $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$. Cazul V: $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **3** $M \cap \mathbb{N} = \{4, \sqrt{25}\}$, $M \cap \mathbb{Z} = \{4; \sqrt{25}; -\sqrt{2025}\}$, $M \cap \mathbb{Q} = \{4; \sqrt{25}; -1, (6); \sqrt{1, (7)}; -\sqrt{2025}\}$, $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{\sqrt{37}\}$. **4** a) A. b) F. c) A. d) F. **5** b) $x \in \{-15; -17\}$. **6** a) $m_a = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. b) $m_g = 6$. **7** b) $b = \frac{3}{4}$, $(a - 4b)^{00} = 1$. **8** a) $a = 10 \in \mathbb{Q}$. b) $u(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 19 + 2) = 7 \Rightarrow b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **9** a) $t < y < x < z$. b) $a > b > d > c$. **10** a) $n = 7$. b) $m = 3$. **11** a) $x = \frac{34}{25}$. b) $x = \frac{3}{7}$. **12** a) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. b) $x \in \{0, 1, 2\}$. **13** a) $(1; 2)$. b) $(2\sqrt{5}; 0)$. **14** a) 1650 lei. b) 20%. **15** b) 30 de elevi. **16** a) $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. b) 24 cm. **17** 675 m^2 . **18** 90° . **19** a) $\triangle CDE$ este echilateral. **20** 100° . **21** $20\pi \text{ cm}; 100\pi \text{ cm}^2$. **22** b) $\frac{729\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$. **23** $36(\pi - 2) \text{ cm}^2$. **24** b) 100 cm^2 . **25** a) 12 cm. **26** b) 4,8 cm. **27** a) 12 cm^2 . b) 4,8 cm. **28** b) $(5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}) \text{ cm}$. **29** b) 5 cm. **30** b) 324 cm^2 .

TESTUL 1

SUBIECTUL I **1 D. 2 C. 3 B. 4 B.** **SUBIECTUL al II-lea** **1 D. 2 C. 3 B. 4 C.** **SUBIECTUL al III-lea** **1** a) $x = -9$. b) 200 lei. **2** a) 192 cm^2 . b) 19,2 cm. c) 6 cm.

TESTUL 2

SUBIECTUL I **1 C. 2 D. 3 D. 4 D.** **SUBIECTUL al II-lea** **1 B. 2 B. 3 D. 4 A.** **SUBIECTUL al III-lea** **1** a) $(\sqrt{7}; \sqrt{2})$. b) $x = -13 \in \mathbb{Q}$. **2** b) 90° . c) $2\sqrt{3} \text{ cm}$.

1

Unitatea
de învățare

INTERVALE DE NUMERE
REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

LECȚIA 1

PROBLEME

1 $B = \left\{0; \frac{91}{7}\right\}$. $C = \{-3; -2; 0; \frac{91}{7}\}$. $D = \{-3; -2; -1, 5; 0; 0, (3); \frac{3}{4}; 1 \frac{2}{3}; \frac{91}{7}; \sqrt{6, 25}\}$. $E = \{\sqrt{2}; \pi\}$. **2** $A = \{x | x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$. $B = \left\{x | x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. $C = \{x | x \in \mathbb{Z}, x \mid 10\}$. $D = \{x | x = 7n, n \in \mathbb{N}\}$. $E = \{x | x = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$. **3** $A = \left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right\}$. $B = \emptyset$. $C = \{0\}$. $D = \{-3, 3\}$. **4** a) $\left\{\frac{111}{3}, \sqrt{16}\right\}$. b) $\left\{\frac{111}{3}, \sqrt{16}\right\}$. c) $\left\{1, 0(2); \sqrt{16}; \frac{111}{3}\right\}$. d) $\{-\sqrt{7}; 1 - \sqrt{2}; \pi\}$. e) $\emptyset$. f) $\{1, 0(2)\}$.

LECȚIA 2

PROBLEME

1 a) A. b) F. c) A. d) F. e) A. f) A. g) A. **2** $A = [-1, 2]$. $B = (2, 3)$. $C = [-1, 3)$. $D = (2, 4]$. $E = (-\infty, 0]$. $F = [-2, \infty)$. $G = (-\infty, -\sqrt{2})$. $H = (\sqrt{3}, \infty)$. $I = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right)$. $J = (-\infty, 1]$. **3** a) $[-1, 1]$. b) $\mathbb{R}$. c) $[0, \infty)$. d) $(2, 10)$. e) $\{4\}$. f) $\emptyset$. **4** $A = [-3, 3]$. $B = (-4, 4)$. $C = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. $D = [0, 3]$. $E = [0, 2]$. $F = [1, \infty)$. $G = [-3, 2)$. **5** a) $[3, 4)$. b) $[-2, -1)$. c) $[-1, 1)$. **6** a) 3. b) 3. c) 3 sau 4. d) -2, -1, 0 sau 1. **8** a) F. b) A. c) A. d) A. e) F. **9** a) 9. b) 15. c) 8. d) 1. e) zero numere. f) 15. g) 8. h) 1. i) $2n - 2$. **11** $A = [-5; 5]$. $B = [-2; 6]$. $C = (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$. $D = [0; \infty)$. $E = (-\infty; 0]$. $F = (-3; -1] \cup [1; 3)$. $G = (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$. **12** a) A. b) F. c) F. **14** $A = \mathbb{R}$.



$B = \left\{-\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right\}$. $C = \emptyset$. **15** Se arată că $a < \frac{5a+b}{6} < \frac{a+5b}{6} < b$. **16** a) A. b) A. c) A. d) A. **18** a) Se arată că $a < \frac{2a+b}{3} < b$. b) $8a < 3a+5b < 8b$. **19** 6543210.

LECȚIA 3

PROBLEME

3 a) $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$. b) $\{0, 1, 2\}$. c) $\mathbb{N}$. d) $\emptyset$. **5** a) $\left[\frac{5}{3}, \infty\right)$. b) $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$. c) $[21, \infty)$. d) $[-1, 7]$. e) $[-1, \infty)$. f) $(-\infty, 1]$. g) $\left(-\infty, \frac{18}{11}\right)$. **6** a) $(-\infty, 19)$. b) $(-\infty, 4]$. c) $[0, 2]$. **9** a) $(-\infty, -1)$. b) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. c) $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$. d) $(-\infty, 13]$. e) $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$. **19** a) $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$. b) $(\sqrt{2}, \infty)$. c) $(4\sqrt{3}, \infty)$. d) $\left(-\infty, \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$. **20** $A = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $C = \left(\frac{1}{5}, \infty\right)$. $D = \emptyset$. $E = \{0, 1\}$. $F = \{-2, -1, 0\}$. **21** a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. b) $(-\infty, 5]$. c) -1 .

LECȚIA 4

PROBLEME

6 1; 6; 32. **7** Este cuprinsă între 24 și 84. **8** Mai mic decât 48 km. **9** $L \in (5, 30)$. **10** $x \in [-110, +\infty)$. **11** Numărul maxim de bile este 28. **12** Numărul minim de autobuze este 14.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1 -3. **2** $\frac{2}{9}$. **3** a) $\frac{11}{101}$. b) $1 - \frac{11}{101}$. c) $\frac{76}{101}$. **4** $a+2 \in (3, 5)$; $2a \in (2, 6)$; $a+4 \in (5, 7)$; $-a \in (-3, -1)$. **5** 100π . **6** 2 345, 15. **7** $x \in [2, 03; 2, 04)$.

TESTUL 1

SUBIECTUL I **1** 5. **2** -6. **3** $[-6; 4]$. **4** $[2; 6]$. **5** $\{0, 1, 2\}$. **6** $[6, \infty)$. **SUBIECTUL al II-lea** **1** D. **2** A. **3** B. **4** B. **5** A. **6** C. **SUBIECTUL al III-lea** **1** a) $a = \frac{2}{7}$. b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} < \frac{2}{7} < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. **2** a) $A = [-1; 2]$. $B = (-4; 1)$. b) $\{-1; 0; 1; 2\}$. $\{0\}$. $(-4; 2]$. $[-1; 1)$. **3** a) 80. b) 94.

TESTUL 2

SUBIECTUL I **1** A. **2** F. **3** F. **4** A. **SUBIECTUL al II-lea** **1** $\longrightarrow$ c. **2** $\longrightarrow$ a. **3** $\longrightarrow$ d. **4** $\longrightarrow$ e. **SUBIECTUL al III-lea** **1** a) $x \in \left[\frac{11}{2}, \infty\right)$. b) $x \in [3; \infty)$. **2** a) $A = (0; 7]$. $B = [-2; 6]$. b) $A \cap B = (0; 6]$. $A \cup B = [-2; 7]$. c) $n = 7$.

2

Unitatea
de învățare

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

LECȚIA 1

PROBLEME

9 a) $x^2 - 2x + 1$. b) $x^2 + 2xy + y^2$. c) $x^2 + 3x + 2$. d) $x^2 + 5ax + 6a^2$. e) $x^4 - 7ax^2 + 10a^2$. f) $x^4 - 5x^2 - 14$. g) $3x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1$. h) $6a^2 + 2ab + 4b^2$. **10** 1. **12** a. A. b. F. c. F. **13** 20%. **14** a) Se arată că $(100x + 25) \cdot (100y + 25) = 100z + 25$. b) $(100x + 76) \cdot (100y + 76) = 100z + 76$. **15** 1.

LECȚIA 2

PROBLEME

6 k) $96 \cdot 104 = (100 - 4) \cdot (100 + 4) = 100^2 - 16 = 9984$. l) $37 \cdot 43 = (40 - 3)(40 + 3) = 40^2 - 3^2 = 1591$. m) 1. n) 1. **7** j) $99^2 + 100^2 + 101^2 - 3 \cdot 99 \cdot 101 = (99^2 - 2 \cdot 99 \cdot 101 + 101^2) + 100^2 - (100 - 1) \cdot (100 + 1) = (99 - 101)^2 + 100^2 - 100^2 + 1 = 5$. k) -98. l) -10. m) $(100 + 5)^2 = 11025$. n) $(200 - 2)^2 + (200 + 2)^2 - (200 - 2)(200 + 2) = 200^2 + 12 = 40012$. **10** a) $2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \sqrt{6} + 1 - 5(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = -2(2 + \sqrt{2})$. b) $9 + 5\sqrt{3} - 12 + 6\sqrt{3} + 6 + 3\sqrt{3} + 12 - 8\sqrt{3} = 3(5 + 2\sqrt{3})$. **11** $S = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} - 1$ etc.



LECȚIA 3

PROBLEME

2 k) $(5a-2b)^2$. l) $(a\sqrt{3}+b\sqrt{2})^2$. m) $(a^2\sqrt{2}+1)^2$. n) $(a^2+a\sqrt{5})^2 = a^2(a+\sqrt{5})^2$. **3** d) $(3\sqrt{3}-x)(3\sqrt{3}+x)$. e) $(2x\sqrt{2}-\sqrt{3})(2x\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **5** a) $a^4+a^2+1 = (a^2+1)^2 - a^2 = (a^2-a+1) \cdot (a^2+a+1)$. b) $a^4+1 = (a^2+1)^2 - 2a^2 = (a^2-a\sqrt{2}+1)(a^2+a\sqrt{2}+1)$. c) $a^4-a^2+1 = (a^2+1)^2 - 3a^2 = (a^2-a\sqrt{3}+1)(a^2+a\sqrt{3}+1)$. d) $x^4+64 = (x^2+8)^2 - 16x^2 = (x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$. e) $x^4+4x^2+16 = (x^2+4)^2 - 4x^2 = (x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$. f) $a^4+9a^2+81 = (a^2+9)^2 - 9a^2 = (a^2-3a+9)(a^2+3a+9)$. g) $x^2+3x+2+ax+a = (x+1)(x+2)+a(x+1) = (x+1)(x+2+a)$. h) $x^2-4x+3-bx^2+b = (x-1)(x-3)-b(x-1)(x+1) = (x-1)(x-3-bx-b)$. **6** $x^2+12x+35 = (x+5)(x+7)$ etc. **7** $x^2+6x+9-2 = (x+3)^2-2 = (x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2})$. **8** $x^2+8x+13 = x^2+8x+16-3 = (x+4)^2-3 = (x+4-\sqrt{3})(x+4+\sqrt{3})$ etc. **9** a) $(3^n+2)^2$. b) $(6^n-3)^2$. c) $(k^2+3k+1)^2$. d) $(n^2+n-2)^2$. **10** a) $(x-y)(x+y) = 97$. Deci $x-y = 1$ și $x+y = 97$ etc. b) $(x-y)(x+y) = 97^2$ etc. **13** $a = (n+2)((n+2)^2-1) = (n+1)(n+2)(n+3)$ etc. **14** b) $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2+2+2$. c) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2$ etc. **15** $a^4+b^4 = c^4+2a^2b^2$ echivalent cu $(a^2-b^2)^2 - c^4 = 0$ sau $(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2) = 0$ etc. **16** $\frac{(7^{2n}+3)^2}{7^{2n}+3} - 3 = 7^{2n} = (7^n)^2$. **17** $(x-5)^2 + (y+7)^2 \leq 0$, de unde $x = 5$ și $y = -7$.

LECȚIA 4

PROBLEME

1 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **2** $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ și deci răspunsul este negativ. **5** a) $-7x^2$. b) $\frac{x+2}{2}$. c) $x-2$. d) $\frac{x+1}{x-1}$. e) $\frac{x-2}{x+2}$. f) $\frac{2x-1}{2x+1}$. g) $\frac{1}{x+1}$. h) $\frac{x-1}{x^2}$. i) $\frac{a+b}{x-1}$. **6** $n+3 \in \mathbb{N}$. **7** $\frac{3}{a+1} \in \mathbb{Z}$, dacă $a+1 \in \{\pm 1, \pm 3\}$ etc. **8** a) $n+7 \in \mathbb{N}$. b) $\frac{6}{2n+3} \in \mathbb{Z}$, dacă $2n+3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ etc. **13** $a = (x+3+x-3)^2 = (2x)^2$.

LECȚIA 5

PROBLEME

2 b) Se aplică punctul a) fiecărei fracții. **3** a) 16, pentru $x \in \mathbb{R}^*$. b) $\frac{xy}{6}$, pentru $x, y \in \mathbb{R}^*$. c) $\frac{x-4}{x+4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$. d) $\frac{2}{x-5}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$. **4** a) $4ax^2$, pentru $x, a \in \mathbb{R}^*$. b) $\frac{3}{2}$, pentru $x \in \mathbb{R}^*$. c) $\frac{x+1}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 2\}$. d) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, -1, 5\}$. **7** a) $\frac{x-2}{2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. b) $-\frac{1}{x-2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. **15** a) $E(x) = \frac{x^2+9}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. b) Pentru $x > 1$ avem $\frac{x^2+9}{x} \geq 6$, echivalent cu $(x-3)^2 \geq 0$. c) $E(x) = x + \frac{9}{x} \in \mathbb{Z}$ dacă $x \in \{\pm 3, \pm 9\}$. **16** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{4}{x^2-2x} = \frac{3}{x}$ etc. **18** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. c) Cum $x \in \mathbb{N}$, avem $\frac{3-x}{x+1} \geq 0$, dacă $3-x \geq 0$. Deci $x \in \{0, 2, 3\}$. d) $E(x) = -1 + \frac{4}{x+1} \in \mathbb{N}$ dacă $x+1 \in \{1, 4\}$, adică $x \in \{0, 3\}$.

LECȚIA 6

PROBLEME

7 $a \in \{-1, 2\}$. **8** a) $\{-10, 10\}$. b) $\emptyset$. c) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. d) $\{0, \sqrt{3}\}$. e) $\{0, 7\}$. f) $\left\{0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$. **9** h) $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$. **10** f) $\{\pi, 1-\pi\}$. g) $\{-1, \pi\}$. h) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. **11** $m \in \{\pm 2\}$ etc.

LECȚIA 7

PROBLEME

6 $x = 4$. **7** $a \in \{-8, 6\}$. **8** $n = 11$. **10** $n = 16$.



TESTUL 1

SUBIECTUL I **1** 6. **2** $3x(x-2)$. **3** $\frac{x+3}{3}$. **4** 3. **5** $-\frac{3}{2}$. **6** -1. SUBIECTUL al II-lea **1** A. **2** D. **3** C. **4** B. **5** C. **6** C. SUBIECTUL al III-lea **1** a) $E(x) = x^2 + 4x - 12 = (x+2)^2 - 16 = (x-2)(x+6)$. b) $E(x) = (x+2)^2 - 16 \geq -16$. **2** b) $x \in \{1; 2\}$.

TESTUL 2

SUBIECTUL I **1** 0, $-\frac{3}{2}$. **2** $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$. **3** $\{-5, 4\}$. **4** $\emptyset$. **5** 4. **6** $8\sqrt{3}$ cm. SUBIECTUL al II-lea **1** D. **2** B. **3** A. **4** D. **5** B. **6** A. SUBIECTUL al III-lea **1** $x_1 = \frac{9-\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{9+\sqrt{3}}{3}$. **2** a) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. b) $x = 1$. c) $E(x) = (2x+1)^2 + 4$, rezultă $\min E(x) = 4$.

TESTUL 3

SUBIECTUL I **1** A. **2** A. **3** F. **4** A. SUBIECTUL al II-lea **1** $\longrightarrow$ e. **2** $\longrightarrow$ a. **3** $\longrightarrow$ d. **4** $\longrightarrow$ c. SUBIECTUL al III-lea **1** a) $E(x) = \frac{x-2}{x+2}$, deci $E(x) + \frac{4}{x+2} = \frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{x+2} = 1$. **2** a) $m = -15$. b) $x \in \{-1; 3\}$. c) $m = 1$.

3

Unitatea
de învățare

FUNCȚII

LECȚIA 1

PROBLEME

7 a) $p(x) = \frac{10-x}{10} = 1 - \frac{x}{10}$. c) $x = 4$. d) $\frac{9}{10}$ valoare maximă; $\frac{1}{10}$ valoare minimă. **8** b) -30 valoare minimă; 50 valoare maximă. c) $f(n) = 5 \cdot n - 3(10-n) = 8n - 30$. **9** $\frac{1}{27}$. **10** f și g au același domeniu de definiție, același codomeniu și în plus $f(-1) = g(-1) = 1$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$. **11** $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. **12** $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$. **15** a) $\text{Im } f = \{3, 2, 0, -2\}$. **16** a) $\text{Im } f = \{6, 9, 12\}$. **17** a) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. b) $B = \{3, 2, 1\}$.

LECȚIA 2

PROBLEME

3 $A = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$. $B = \{1, 2\}$. **6** a) $a = -4$. b) $b = 1$. c) $c = \frac{5}{4}$. d) $\left(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}\right)$. e) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. **9** a) 25 de elevi. b) 14 elevi. c) Nota 8. d) nota 5. e) 7,52.

LECȚIA 3

PROBLEME

3 a) $(5, 0)$, $(0, 5)$. b) $(2, 0)$, $(0, -1)$. **4** g. **5** $f(x) = 2x - 5$. **6** a) $m \in \{0, 1\}$. b) $m = 0$. c) $m^2 = 1$, de unde $m \in \{-1, 1\}$.

LECȚIA 4

PROBLEME

1 $B(0; -1)$; $C(5, 4)$. **3** $f(3) = 2$ reprezintă valoarea minimă, iar $f(-1) = 6$ reprezintă valoarea maximă. **4** Triunghiul dreptunghic AOB , unde $A(0, -2)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, are perimetrul $P = 4 + 2\sqrt{2}$ (unități) și aria $\mathcal{A} = 2$ (unități pătrate). **5** a) $f(0) = g(0) = 1$. c) Triunghiul ABC cu $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$ are perimetrul egal cu $2\sqrt{2} + 2$ (unități) și aria egală cu 1 (unități pătrate). **6** $f(x) = 1 - x$. **7** b) $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$. **8** $A = (-1, 3)$. **9** $f(1) = m - 1$, de unde $m = 0$. **10** $I = (3, 7)$. **11** $f(2) = 1$. **12** a) $(-1; -1)$. b) nu există. c) $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. d) $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. e) $(-1, -1)$; $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **13** a) $x = 4$. b) $x \in \emptyset$. c) $y = -3$. d) $y = 4$. e) $x \in \emptyset$. f) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. b) $A(1, 0)$. $B(0, 1)$. **15** a) $m = 1$. d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. e) $\frac{1}{2}$. f) 45° .



LECȚIA 5

PROBLEME

- 1 a) A, B, C necoliniare. b) A, B, C coliniare. 2 $A(-2, -5)$. 3 $A(0, -3\sqrt{3}), O(0, 0), B(3, 0)$. $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 60^\circ$.
4 a) $A(-1, 1)$. b) $B(-2, 0), C(-\frac{3}{2}, 0)$, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{4}$. 5 Pentru $m = 2, A(-n, -n)$. Pentru $m = 1 - n, B(1, 1)$. Pentru $m = 1 + n, C(-1, -1)$. 6 a) $90^\circ; 45^\circ$. b) $\mathcal{A} = 2; p = 4 + 2\sqrt{2}$. 7 Ecuația $f(x) = g(x)$ nu are soluții. 8 a) $A(2, 0), B(4, 8), C(6, 0)$, $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 16$. b) $D(0, -8), B(4, 8), E(0, 24)$, $\mathcal{A}_{\Delta DBE} = 64$. c) $\operatorname{tg} x = 4$. 9 a) $A(-1, -1), B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. b) $S = 651$.

PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1 b) $f(x) = 2x - 1$. 3 $a = 3$. 5 A, D . 6 a) $A(-4, 11)$. b) $B(4, -5)$. c) $C(1, 1)$. 8 a) $a = b = 3$. Distanța de la O la reprezentarea geometrică a graficului funcției f este $\frac{9\sqrt{10}}{10}$, iar pentru funcția g este $\frac{3\sqrt{26}}{26}$. 9 $a = -2$.
10 a) $A(0, -\sqrt{2}), O(0, 0), B(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$; $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. b) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. c) $\sqrt{6}$. 11 b) Reprezentările grafice sunt două câte două paralele. c) $A(1, 2), B(5, 2), C(2, -1), D(-2, -1)$; $\mathcal{A}_{ABCD} = 12$. 13 $\operatorname{Im} f = (-1, \infty)$. 14 $I = [0, 3], a = 3, b = 3$.
16 $A(x) = 3x, x > 0$. 20 Domeniul de definiție: $\{-3, -2, 1, 3, 4\}$. Mulțimea valorilor: $\{-2, -1, 2\}$.

TESTUL 1

- SUBIECTUL I 1 - 5. 2 3. 3 1. 4 0. 5 - 2. 6 2. SUBIECTUL al II-lea 1 C. 2 B. 3 D. 4 C. 5 A. 6 C.
SUBIECTUL al III-lea 1 a) $a = 1, b = 2$. b) $A(-2, 0)$. c) $\sqrt{2}$. 2 a) $f(1) = 2$. b) $x \in (-\infty, 1]$. c) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$.

TESTUL 2

- SUBIECTUL I 1 F. 2 A. 3 A. 4 F. SUBIECTUL al II-lea 1 $\longrightarrow$ b. 2 $\longrightarrow$ e. 3 $\longrightarrow$ d. 4 $\longrightarrow$ c.
SUBIECTUL al III-lea 1 c) $\frac{10\sqrt{17}}{17}$. 2 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4$. b) $a = \frac{5}{2}$.

4

Unitatea
de învățare

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

LECȚIA 1

PROBLEME

- 7 37 paralelipede dreptunghice mici.

LECȚIA 2

PROBLEME

- 1 a) O infinitate. b) O infinitate. 2 a) $C \in \alpha$. b) $CD \subset \alpha$. 3 a) F. b) A. c) F. d) A. e) F. f) F. 4 a) A. b) F. c) A. d) A. e) A. 5 a) Nu. b) 6 drepte. 6 4 plane. 7 a) A. b) F. c) A. d) A. e) A. f) F. 8 a) A. b) A. c) A. d) A. 10 a) A. b) A. c) A. d) A. e) F. 11 a) AB . b) AC . c) BC . d) $AB \subset (ABC)$ și $AB \subset (ABD)$. 12 Numărul maxim de drepte este 6; numărul minim de drepte este 4.

LECȚIA 3

PROBLEME

- 4 $100\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 5 4 triunghiuri echilaterale. 6 $p: A; q: F$. 7 b) $(ABN) \cap (CDM) = MN$. 12 a) 36 cm. b) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

LECȚIA 4

PROBLEME

- 4 $\sqrt{6} \text{ cm}$. 5 $192 \cdot (2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$. 11 b) 13 cm.

LECȚIA 5

PROBLEME

- 1 $80\pi \text{ cm}^2$. 2 $\sqrt{36\pi^2 + 64} \text{ cm}$. 3 $96\pi \text{ cm}^2$. 4 8 cm. 5 20 cm. 7 $12\pi \text{ cm}^2, R_{\text{con}} = 2 \text{ cm}$.



LECȚIA 6

PROBLEME

1 a) 90° . b) 45° . c) 90° . d) 90° . e) 60° . f) 60° . 2 a) 60° . b) 90° . c) 45° . d) 90° . 3 a) 60° . b) 45° . c) 30° . 4 a) 90° . b) 0° . c) 45° . d) 60° . 5 a) 60° . b) 90° . c) 90° . d) 60° . e) 60° . 6 a) 45° . b) 60° . c) 90° . 7 a) 60° . b) 90° . c) 60° . d) 30° . e) 90° . f) 60° .

LECȚIA 7

PROBLEME

1 a) Paralele. b) Necoplanare. c) Paralele. d) Paralele. e) Necoplanare. f) Paralele. g) Concurente. h) Concurente. 2 a) VB, VC, AB, AC . b) VA și BC , VB și AC , VC și AB . 3 a) Necoplanare. b) Paralele. c) Necoplanare. d) Necoplanare. e) Necoplanare. f) Concurente. g) Paralele. 4 Se arată că $MN \parallel PQ$ sau $MQ \parallel NP$. 5 a) $AB \parallel (DCD')$, $AB \subset (DCA)$, $AB \cap (DD'A') = \{A\}$, $AB \cap (DD'B) = \{B\}$, $AB \subset (A'B'A)$. b) $AC \subset (ADB)$, $AC \cap (DBD') = \{O\}$, $\{O\} = AC \cap BD$, $AC \cap (BB'C) = \{C\}$, $AC \cap (DCD') = \{C\}$, $AC \cap (DBB') = \{O\}$, $AC \cap (A'D'B') = \emptyset$. 6 a) $MO \parallel VC$, $VC \subset (VDC)$, rezultă $MO \parallel (VDC)$. b) $MO \parallel VC$, $VC \subset (VBC)$, rezultă $MO \parallel (VBC)$. c) $VC \parallel MO$, $MO \subset (MBD)$, rezultă $VC \parallel (MBD)$. 7 a) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{R.T. Thales} MN \parallel BC$, $BC \subset \alpha$, rezultă $MN \parallel \alpha$. b) $\frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC}$, rezultă $MN \cap BC = \{P\}$, rezultă $MN \cap \alpha = \{P\}$. 8 a) $MC \parallel NO$, $NO \subset (NBD)$, rezultă $MC \parallel (NBD)$. b) $NO \parallel MC$, $MC \subset (BMC)$, rezultă $NO \parallel (BMC)$. c) $NO \cap (BMD) = \{O\}$. 9 $MN \parallel \alpha$. 10 a) $MN \parallel AC$, $AC \subset (ABC)$, rezultă $MN \parallel (ABC)$. b) $AC \parallel MN$, $MN \subset (MNB)$, rezultă $AC \parallel (MNB)$. 11 a) Concurente. b) Necoplanare. c) Necoplanare. d) Paralele. e) Necoplanare. f) Concurente. g) Necoplanare. 12 a) $AD \parallel MN$, rezultă că A, D, M, N sunt coplanare. b) AD, VB necoplanare, $AD \parallel BC$, AB, VA concurente. 13 $AA' \cap (ABC) = \{A\}$; $AA' \parallel (CBB')$; $AA' \subset (ABB')$; $AA' \cap (BCA') = \{A'\}$. 15 $G_1 G_2 \parallel BC$, $BC \subset (ABC)$, rezultă $G_1 G_2 \parallel (ABC)$. 17 Fie $AF \cap BD = \{P\}$. Rezultă $EF \parallel CP$, $CP \subset (BCD)$, deci $EF \parallel (BCD)$. 18 $\frac{MB}{BA} = \frac{MT}{TA} = \frac{MT}{TE} = \frac{MC}{CE}$. Rezultă $BC \parallel AE$, $AE \subset (ATE)$, deci $BC \parallel (ATE)$. 20 a) $OO' \parallel CC'$, $CC' \subset (CDD')$, rezultă $OO' \parallel (CDD')$. b) $AO' \parallel C'O$, $C'O \subset (BC'D)$, rezultă $AO' \parallel (BC'D)$. 22 $x = 10$. 23 a) $OM \parallel SA$, $SA \subset (SAD)$, rezultă $OM \parallel (SAD)$. b) $MN \parallel CD$, $CD \subset (ABC)$, rezultă $MN \parallel (ABC)$. c) $ON \parallel SB$, $SB \subset (SBA)$, rezultă $ON \parallel (SBA)$. d) $ON \parallel SB$, $SB \subset (SBM)$, rezultă $ON \parallel (SBM)$. 25 a) $BB' \parallel (ACC')$. b) $EF \subset (ABC')$. 26 a) $RS \parallel AB$, $AB \subset (ABC)$, rezultă $RS \parallel (ABC)$. b) $PS \parallel CD$, $PS \subset (PRS)$, rezultă $CD \parallel (PRS)$. 27 a) $OM \parallel AC'$, $AC' \subset (ACC')$, rezultă $OM \parallel (ACC')$. b) $AC' \parallel OM$, $OM \subset (OMC)$, rezultă $AC' \parallel (OMC)$.

LECȚIA 8

PROBLEME

3 $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $AB, BC \subset (ABC)$, $A'B' \cap B'C' = \{B'\}$, rezultă $(A'B'C') \parallel (ABC)$. 4 a) $PN \parallel AB$, $MN \parallel AC'$, $AB, AC' \subset (C'AB)$, rezultă $(MNP) \parallel (C'AB)$. 5 b) $\mathcal{A}_{MNPQ} = 900 \text{ cm}^2$. 7 a) A. b) F. c) A. d) A. e) A. f) A. g) F. 8 $MN \parallel BC$, $MO \parallel EC$; $BC, EC \subset (BEC)$, rezultă $(MNO) \parallel (BEC)$. 9 a) $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$; $AB, BC \subset (ABC)$, rezultă $(MNP) \parallel (ABC)$. b) $\mathcal{A}_{\Delta MNP} = \frac{100\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^2$.

LECȚIA 9

PROBLEME

1 b) $\mathcal{P}_{\text{secțiunii}} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$, $\mathcal{A}_{\text{secțiunii}} = 8 \text{ cm}^2$. 3 $\mathcal{A}_{MNPQ} = 12,5 \text{ cm}^2$, $\mathcal{P}_{MNPQ} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$. 5 b) $\frac{NB'}{NB} = \frac{2}{3}$, $\frac{PC}{CC'} = \frac{3}{5}$. 6 $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 7 $A'B' = 8 \text{ cm}$. 8 $\frac{\mathcal{A}_{\Delta MNP}}{\mathcal{A}_{\Delta BCD}} = \frac{1}{16}$. 9 $25\pi \text{ cm}^2$.

TESTUL 1

SUBIECTUL I 1 $d \cap \alpha = \emptyset$. 2 Paralele. 3 Paralele. 4 AA_1 și BB_1 . 5 Fals. 6 $d_1 \parallel d_3$ sau $d_1 = d_3$. SUBIECTUL al II-lea 1 B. 2 D. 3 A. 4 B. 5 B. 6 A. SUBIECTUL al III-lea a) $G_1 G_2 \parallel AC$, $AC \subset (ABC)$, deci $G_1 G_2 \parallel (ABC)$. b) $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 108 \text{ cm}$. c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



TESTUL 2

SUBIECTUL I 1 A. 2 F. 3 A. 4 F. **SUBIECTUL al II-lea** 1 $\longrightarrow$ b. 2 $\longrightarrow$ e. 3 $\longrightarrow$ a. 4 $\longrightarrow$ d. **SUBIECTUL al III-lea** 1 a) $OQ \parallel DC'$, $DC' \subset (A'DC')$, $OQ \notin (A'DC') \Rightarrow OQ \parallel (A'DC')$. b) $OQ \parallel DC'$; $B'Q \parallel A'D$; $OQ, B'Q \subset (B'OQ)$; $A'D, DC' \subset (A'DC')$; $OQ \cap B'Q = \{Q\} \Rightarrow (B'OQ) \parallel (A'DC')$. 2 a) O_1O_2 este linie mijlocie în $\Delta A'DB \Rightarrow O_1O_2 = \frac{BD}{2} = 4$ cm. b) $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{CD; A'B} = \widehat{AB; A'B} = \widehat{ABA'} = 45^\circ$ ($ABB'A'$ este pătrat). c) $B'D'O_1O_2$ este trapez ($O_1O_2 \parallel B'D'$). Cum $B'O_1$ și $D'O_2$ sunt diagonale în acest trapez, rezultă că dreptele $B'O_1$ și $D'O_2$ sunt coplanare.

LECȚIA 10

PROBLEME

3 $BD = 6\sqrt{2}$ cm, $DC = 10$ cm, $DM = \sqrt{61}$ cm. 4 $MB = \sqrt{281}$ cm, $MC = \sqrt{506}$ cm, $MD = 5\sqrt{10}$ cm. 5 $MB = 6\sqrt{11}$ cm, $MC = 6\sqrt{29}$ cm, $MD = 6\sqrt{11}$ cm. 6 $2\sqrt{6}$ cm. 7 $MB = 6\sqrt{2}$ cm, $MC = 12$ cm, $MD = 6\sqrt{5}$ cm, $MP = 2\sqrt{30}$ cm. 8 $A'C = 6\sqrt{3}$ cm, $A'M = 9$ cm, $OM = 3\sqrt{5}$ cm, $OC' = 3\sqrt{6}$ cm. 9 $2\sqrt{5}$ cm.

LECȚIA 11

PROBLEME

1 $5\sqrt{21}$ cm. 2 $\frac{\sqrt{501}}{3}$ cm. 3 $VA = 4\sqrt{3}$ cm, $VM = \sqrt{39}$ cm. 4 a) 6 cm. b) 4 cm. c) $2\sqrt{2}$ cm. 5 a) 10 cm. b) $5\sqrt{2}$ cm. 6 b) $25\sqrt{3}$ cm². 7 8 cm. 8 $x = 6,5$ cm. 9 $G = 5$. 10 $17\sqrt{2}$ cm. 11 $\sqrt{41}$ cm. 12 $6\sqrt{2}$ cm. 13 6 cm. 14 a) $8\sqrt{2}$ cm. b) $8\sqrt{2}$ cm. 15 3 cm. 16 a) 12 cm. b) 6 cm. 17 a) $4\sqrt{2}$ cm. b) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. 18 a) 6 cm. b) 0.

LECȚIA 12

PROBLEME

1 6 cm. 2 a) 3 cm. b) 24 cm². 3 a) 10 cm. b) $2\sqrt{38}$ cm. 4 b) $2\sqrt{3}$ cm. 5 b) $2\sqrt{3}$ cm. 6 4 cm. 7 $36\sqrt{3}$ cm². 8 a) 3 cm. b) $\frac{1}{3}$ cm.

TEST

SUBIECTUL I 1 Paralele. 2 Perpendiculare. 3 4 cm. 4 8 cm. 5 $2\sqrt{2}$ cm. 6 AC. **SUBIECTUL al II-lea** 1 A. 2 B. 3 D. 4 B. 5 A. 6 C. **SUBIECTUL al III-lea** b) Dacă D este mijlocul muchiei BC , rezultă $BC \perp SD$, $BC \perp AD$, $SD, AD \subset (SAD)$, rezultă $BC \perp (SAD)$. c) $\sqrt{601}$ cm.

LECȚIA 13

PROBLEME

1 a) $\{A\}$. b) $\{B\}$. c) $\{B'\}$. d) $\{A\}$. e) $\{B\}$. f) $\{A\}$. g) Segmentul AB . i) Segmentul BD . j) $\{B'\}$. k) Segmentul AC . l) Segmentul DB . m) Segmentul AD' . n) Segmentul BC' . 2 a) $\{O\}$. b) $\{A\}$. c) $\{A\}$. d) AO . e) OB . 3 a) AB . b) BC . c) $B'C'$. d) $B'C'$. e) $\{M\}$. g) MC . h) NC' . i) AM . j) AM . k) MN . l) AB . 6 a) $\{D\}$. b) $\{C'\}$. c) $\{C'\}$. d) Segmentul DB . e) Segmentul DA' . f) CB' . g) AB' . h) Segmentul $D'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. 8 b) i) VO . ii) VO . iii) VO .

LECȚIA 14

PROBLEME

1 a) $10\sqrt{2}$ cm. b) 10 cm. c) $10\sqrt{3}$ cm. 2 a) $4\sqrt{3}$ cm. b) 30° . 3 a) 30° . b) 15 cm. 4 $5\sqrt{3}$ cm, 5 cm, $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. 5 a) 45° . b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6 a) 30° . b) $\frac{2}{3}$. c) $\sqrt{21}$ cm. 7 a) 60° . b) $2\sqrt{3}$ cm. 8 a) $2\sqrt{3}$ cm. b) $2\sqrt{39}$ cm. 9 a) $2\sqrt{3}$ cm. b) 60° . 10 $pr_a AB = OB = 9\sqrt{3}$ cm; $pr_a AC = OC = 3\sqrt{3}$ cm; $pr_a BC = BC = 12\sqrt{3}$ cm. 11 $2\sqrt{15}$ cm. 12 45° .



LECȚIA 15

PROBLEME

- 2 a) 45° . b) 45° . c) 45° . d) 90° . 3 a) 60° . b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. c) 667,2 lei. 4 60° . 5 30° . 6 a) 60° . b) 90° . c) 90° . 7 60° . 8 a) 60° . b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. c) 2. 9 a) 60° . b) 60° . c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$. 10 30° . 11 a) 30° . b) 45° . 12 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) 60° . c) $\frac{3}{2}$.

LECȚIA 16

PROBLEME

- 1 a) $8\sqrt{5}$ cm. b) $8\sqrt{3}$ cm. c) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ cm. 2 a) 50 cm. b) $10\sqrt{17}$ cm. d) $\frac{60\sqrt{34}}{17}$ cm. 4 $5\sqrt{10}$ cm. 8 a) $\sqrt{137}$ cm. b) $\frac{\sqrt{209}}{3}$ cm. c) $\frac{3}{\sqrt{137}}$. d) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{209}}$.

LECȚIA 17

PROBLEME

- 1 a) $4\sqrt{2}$ cm. b) $4\sqrt{10}$ cm. c) 4 cm. d) $8\sqrt{2}$ cm. e) $\sqrt{39}$ cm. 2 10 cm; 10 cm; $2\sqrt{17}$ cm. 3 $d(M; AB) = d(M; CD) = 6\sqrt{5}$ cm; $d(M; AD) = d(M; BC) = 2\sqrt{37}$ cm. 4 $3\sqrt{17}$ cm. 5 $3\sqrt{7}$ cm; 12 cm; $3\sqrt{7}$ cm. 6 $4\sqrt{2}$ cm.

LECȚIA 18

PROBLEME

- 1 $6\sqrt{3}$ cm. 2 19,2 cm; 24 cm; $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ cm. 3 $10\sqrt{5}$ cm; $4\sqrt{5}$ cm. 4 a) 2, 4 cm. b) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ cm. 5 a) $3\sqrt{2}$ cm. b) $\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$.

TESTUL 1

- SUBIECTUL I 1 AC. 2 $\sqrt{2}$. 3 3 cm. 4 4 cm. 5 45° . 6 60° . SUBIECTUL al II-lea 1 B. 2 C. 3 A. 4 D. 5 B. 6 A. SUBIECTUL al III-lea a) $2\sqrt{2}$ cm. b) $AO \perp (BDD')$, $AO \subset (AD'O)$, de unde $(AD'O) \perp (BDD')$. c) Drumul parcurs de furnică are lungimea $4\sqrt{10}$ cm, $4\sqrt{10} < 13$.

TESTUL 2

- SUBIECTUL I 1 F. 2 A. 3 A. 4 A. SUBIECTUL al II-lea 1 $\longrightarrow$ d. 2 $\longrightarrow$ a. 3 $\longrightarrow$ b. 4 $\longrightarrow$ e. SUBIECTUL al III-lea 1 a) $\triangle VBD$ este echilateral $\Rightarrow \widehat{VDO} = \widehat{VDB} = 60^\circ$. b) $\frac{18\sqrt{14}}{7}$ cm. 2 a) $d(M; AC) = ME$, unde $E \in AC$, $BE \perp AC$. Rezultă $ME = 4$ cm. b) Ducem $BP \perp ME$, $P \in ME$. Cum $BP \perp AC$, rezultă că $BP \perp (ACM)$, deci $d(B; (ACM)) = BP = \frac{BM \cdot BE}{ME} = \sqrt{3}$ cm. c) Ducem $PQ \perp MA$, $Q \in MA$. Cu teorema celor trei perpendiculare, rezultă că $BQ \perp AM$, deci $(MAC) \cap (MAB) = \widehat{PQB}$. Triunghiul PQB este dreptunghic în P , $\widehat{PQB} = \frac{BP}{PQ} = \sqrt{7}$.

5

Unitatea
de învățare

ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

LECȚIA 1

PROBLEME

- 1 a) $6\sqrt{15}$ cm, 24 cm. b) 4. c) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ cm. d) $3\sqrt{2}$ cm. 2 a) 4 cm, $2\sqrt{7}$ cm. b) $DE \parallel AC$. c) 90° . d) $\frac{\sqrt{19}}{3}$. e) $\frac{12\sqrt{21}}{7}$ cm. 3 a) 12 cm. b) $6\sqrt{3}$ cm. c) $\frac{4}{5}$. d) 60° . 4 a) $\sqrt{13}$ cm, 4 cm. b) $\frac{24}{25}$. c) $\sqrt{3}$ cm. 5 a) 8 cm. b) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm. c) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. 6 a) $5\sqrt{5}$ cm. b) $4\sqrt{5}$ cm. c) $2\sqrt{5}$ cm. 7 a) 60° . b) $6\sqrt{3}$ cm. c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.



LECȚIA 2

PROBLEME

- 1 a) 8 cm. b) 48 cm^2 . 2 a) $32\sqrt{3}\text{ cm}^2$. 4 b) $3\sqrt{3}\text{ cm}$. c) $\sqrt{6}\text{ cm}$. 5 a) $AB = 4\sqrt{2}\text{ cm}$, $BC = 3\sqrt{5}\text{ cm}$, $AA' = 2\text{ cm}$.
c) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. 6 a) $6\sqrt{85}\text{ cm}^2$. b) $\frac{21\sqrt{2}}{11}\text{ cm}$. c) 90° . 7 a) $\frac{\sqrt{15}}{5}$. b) $6\sqrt{3}\text{ cm}$. c) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

LECȚIA 3

PROBLEME

- 2 $324\sqrt{3}\text{ cm}^2$, $432\sqrt{3}\text{ cm}^2$, $432\sqrt{6}\text{ cm}^3$. 4 a) 432 cm^2 , $576\sqrt{2}\text{ cm}^3$. b) $6\sqrt{2}\text{ cm}$. c) $12\sqrt{5}\text{ cm}$. 5 $\frac{16\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^3$.
6 b) $18\sqrt{2}\text{ cm}^3$. c) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. 7 b) $972\sqrt{3}\text{ cm}^3$. c) $72\sqrt{3}\text{ cm}^3$. 8 a) $432\sqrt{3}\text{ cm}^2$. b) 10 cm. 9 a) $36\sqrt{3} + 144 \simeq 207\text{ cm}^2$. b) Da. 10 a) $\sqrt{3}\text{ dm}^2$. b) 117,5 ml. 11 $64\sqrt{3}\text{ dm}^3$; 60° . 12 $48\sqrt{3}\text{ cm}^3$; $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 14 36 cm^2 ; 12 cm^3 .
15 $\frac{32\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^3$; 45° . 16 a) $\frac{256\sqrt{6}}{3}\text{ cm}^3$. b) $\frac{4\sqrt{42}}{7}\text{ cm}$. 17 b) 288 cm^3 . c) 60° . 18 a) $144(\sqrt{3} + 1)\text{ cm}^2$. b) $6\sqrt{2}\text{ cm}$.
19 a) $2\sqrt{6}\text{ m}$. b) $48(\sqrt{3} + 1)\text{ m}^2$. c) $32\sqrt{6}\text{ m}^3$. 20 a) 2,25 m. b) $\frac{81}{256}\text{ m}^3$. c) $\frac{108 + 15\sqrt{1053}}{64}\text{ m}^2$.

LECȚIA 4

PROBLEME

- 1 96 cm^2 , 64 cm^3 , $4\sqrt{3}\text{ cm}$. 2 150 cm^2 , 125 cm^3 . 3 a) 216 cm^2 . b) $36\sqrt{2}\text{ cm}^2$. 4 294 cm^2 , 343 cm^3 . 5 $2\sqrt{6}\text{ cm}$, $16\sqrt{2}\text{ cm}^3$. 7 a) 64 cm^2 , 64 cm^3 . b) $2\sqrt{2}\text{ cm}$. 9 a) 27. b) 152 cm^3 , 216 cm^2 . 10 108 cm^2 , 72 cm^3 , $\sqrt{61}\text{ cm}$.
11 $2(12 + 35\sqrt{3})\text{ cm}^2$, $60\sqrt{3}\text{ cm}^3$. 12 3 dm^3 . 13 a) 1720 cm^2 , $\sqrt{881}\text{ cm}$. b) 20 cm. c) $\frac{20}{3}\text{ cm}$. 14 a) 144 cm^2 .
b) $\frac{2\sqrt{2}}{7}$. 15 a) $24a^3$. b) $\frac{13a\sqrt{10}}{10}$. c) $\frac{12a}{5}$. 16 a) 60 000 l. b) 1,2 m. c) 4 h 10 min. 17 a) 72 dm^3 . b) $4x(10 - 2x)\text{ dm}^2$.
c) 2,5 dm. 18 a) 30 cm. b) $2,32\text{ m}^2$. c) $220 + 20\sqrt{13} > 292$. 23 $256\sqrt{6}\text{ cm}^2$, $512\sqrt{6}\text{ cm}^3$. 24 a) $(8 + 16\sqrt{3})\text{ cm}^2$, $8\sqrt{3}\text{ cm}^3$. d) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. 25 b) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$. c) 60° . d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. 26 a) 4 dm^3 . b) 1760 cm^2 . c) $\frac{20\sqrt{6}}{3}\text{ cm}$. 27 a) 1600 cm^2 .
b) 30 cm. c) 2,56 cm. 28 a) 1,60 m. b) 400; 100. 32 24 cm^2 , $4\sqrt{6}\text{ cm}^3$. 33 b) $CM \perp (ABB')$. c) $\frac{6\sqrt{5}}{5}\text{ cm}$.
34 a) $(150 + 50\sqrt{3})\text{ cm}^2$, $125\sqrt{3}\text{ cm}^3$. b) 60° . c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$. 35 a) $3\sqrt{3}\text{ m}$. b) $90\sqrt{3}\text{ m}^3$. c) 132 m^2 . 36 b) 60° .
c) $\sqrt{192} < 14$. 37 a) $9072\sqrt{3}\text{ cm}^3$. b) $9,072\sqrt{3}\text{ l} < 20\text{ l}$. c) 81 cm. 38 a) $12\sqrt{3}\text{ cm}^2$. b) $24\sqrt{3}\text{ cm}^2$. c) 18 cm^3 .
39 $48\sqrt{3}\text{ cm}^3$. 40 a) $54\sqrt{3}\text{ cm}^2$, $121,5\text{ cm}^3$. b) 1,5 cm.

TESTUL 1

- SUBIECTUL I 1 $9\sqrt{3}$. 2 $5\sqrt{3}$. 3 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 4 $18\sqrt{3}$. 5 16. 6 $4\sqrt{3}$. SUBIECTUL al II-lea 1 D. 2 B. 3 A. 4 B. 5 C. 6 D. SUBIECTUL al III-lea a) 400 cm^3 . b) $VA = \sqrt{194} < \sqrt{196} = 14$. c) $\frac{144}{13}\text{ cm}$.

TESTUL 2

- SUBIECTUL I 1 27. 2 $30\sqrt{3}$. 3 60. 4 80. 5 44. 6 2,5. SUBIECTUL al II-lea 1 C. 2 B. 3 A. 4 D. 5 A. 6 C. SUBIECTUL al III-lea a) 15 cm. b) 48. c) Cel puțin doi pești sunt într-un cub de la punctul b), rezultă $d_{\max} = 10\sqrt{3} < 10 \cdot 1,75 = 17,5$.

LECȚIA 5

PROBLEME

- 2 $120\pi\text{ cm}^2$, $144\pi\text{ cm}^3$. 3 a) $240\pi\text{ cm}^3 > 750\text{ cm}^3$. b) $120\pi\text{ cm}^2$. c) 5472 cm^2 , 23040 cm^3 . 4 $96\pi\text{ cm}^2$, $168\pi\text{ cm}^2$, $288\pi\text{ cm}^3$, 96 cm^2 . 5 $16\pi\text{ cm}^2$. 6 a) $90\pi\text{ dm}^3$. b) Aproximativ 212 l. 7 $436,8\pi\text{ g} \simeq 1371,552\text{ g}$. 8 $(1000 + 250\pi)\text{ cm}^2$.
9 $3,75\pi\text{ dm}^3$, aproximativ 3,225 dm^3 . 10 b) $175\pi\text{ cm}^3$. c) 219,8 g.



LECȚIA 6

PROBLEME

2 $1125\sqrt{7}\pi \text{ cm}^3$. 3 b) $\frac{16384\sqrt{5}\pi}{3}$. c) $1536\pi \text{ cm}^2$. 4 $(48 + 32\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$, $64\pi \text{ cm}^3$. 6 $32\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$, $32(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2$, $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3} \text{ cm}^3$. 7 $96\pi \text{ cm}^3$. 8 a) $54\sqrt{6}\pi \text{ cm}^2$, $108\sqrt{6}\pi \text{ cm}^3$. b) 45° . 9 $\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$. 10 $\frac{196\pi}{3} \text{ cm}^2$, $\frac{5488\sqrt{2}}{81}\pi \text{ cm}^3$.

LECȚIA 7

PROBLEME

2 a) $74\sqrt{3} \text{ cm}^2$. b) $\frac{256\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. c) $\frac{16}{7} \text{ cm}$. d) $\frac{12}{7} \text{ cm}$. 3 a) 4 cm . b) $24\sqrt{3} \text{ cm}^3$. c) $\frac{24\sqrt{201}}{67} \text{ cm}$. 4 a) 972 cm^2 , $(972 + 180\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. b) $504\sqrt{26} \text{ cm}^3$. c) $\sqrt{26}$. 5 b) 126 cm^3 . 7 a) 4 cm . b) $\frac{37\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^3$. c) $13,6 \text{ g}$. 8 a) $304\sqrt{2} \text{ cm}^3$. b) $40\sqrt{22} \text{ cm}^2$. c) $\frac{12\sqrt{26}}{13} \text{ cm}$. 9 b) 296 g . c) $1\,169,6 \text{ g}$. 12 a) $48\sqrt{2} \text{ cm}^2$. b) 90° . c) $4\sqrt{2} \text{ cm}$. d) $\sqrt{3}$.

LECȚIA 8

PROBLEME

2 a) $10\pi \text{ cm}$. b) $10,248 \text{ l}$. c) $36\sqrt{442}\pi \text{ cm}^2$. 3 a) $168\pi \text{ cm}^2$. b) $312\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$. c) $5\sqrt{3} \text{ cm}$. 4 $229,84 \text{ dm}^3$. 5 a) 60° . b) $800\pi \text{ cm}^2$. c) 180° . 6 a) $132\pi \text{ cm}^2$, $\frac{152\sqrt{3}}{3}\pi \text{ cm}^3$. b) $\frac{8\sqrt{3}}{13} \text{ cm}$. 7 a) $32\sqrt{5}\pi \text{ cm}^2$. b) $\frac{416\pi}{3} \text{ cm}^3$. c) $72\sqrt{5} < 161$.

TESTUL 1

SUBIECTUL I 1 $210\sqrt{3}$. 2 $\frac{83^2}{3}$. 3 $84\sqrt{3}$. 4 $168\sqrt{3}$. 5 144 . 6 16 . SUBIECTUL al II-lea 1 D. 2 C. 3 D. 4 A. 5 A. 6 C. SUBIECTUL al III-lea a) 2 cm . b) 120 cm^2 . c) 3 cm .

TESTUL 2

SUBIECTUL I 1 A. 2 A. 3 A. 4 F. SUBIECTUL al II-lea 1 $\rightarrow$ e. 2 $\rightarrow$ a. 3 $\rightarrow$ b. 4 $\rightarrow$ d. SUBIECTUL al III-lea 1 b) $81\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 2 b) $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$. c) $\frac{104\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

TESTUL 3

SUBIECTUL I 1 96π . 2 54π . 3 162π . 4 72π . 5 4 . 6 3 . SUBIECTUL al II-lea 1 B. 2 C. 3 D. 4 A. 5 D. 6 B. SUBIECTUL al III-lea a) 10 cm . b) $\frac{1000\sqrt{15}\pi}{3} \text{ cm}^3$. c) $\mathcal{A}_t = 400\pi \text{ cm}^2$ și $3,14 < \pi < 3,15$.

TESTUL 1

TESTE pentru pregătirea examenului de EVALUARE NAȚIONALĂ

SUBIECTUL I 1 b). 2 c). 3 a). 4 c). 5 d). 6 b). SUBIECTUL al II-lea 1 c). 2 b). 3 a). 4 b). 5 a). 6 d). SUBIECTUL al III-lea 1 a) $3 \cdot 10 = 30 < 40$, deci nu este posibil ca Dan să cumpere mingea folosind doar 3 bancnote. b) 2 bancnote de 5 lei și 3 bancnote de 10 lei. 2 b) $E(x) = \frac{1}{x-2}$, deci $E(x) \cdot (x-2) = 1$. 3 a) 0. b) $\sin \widehat{OEF} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 4 b) $3\sqrt{3} \text{ cm}$. 5 b) Fie $PQ \perp AB$, $Q \in AB \Rightarrow Q$ este mijlocul segmentului AB , obținem $PQ = 8 \text{ cm}$, $PE = 4\sqrt{7} \text{ cm}$. 6 a) $\widehat{VA(\widehat{ABC})} = \widehat{VAO} = 30^\circ$, O centrul bazei ABC . b) $d(A; VM) = \frac{12\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$.

TESTUL 2

SUBIECTUL I 1 c). 2 a). 3 b). 4 d). 5 d). 6 c). SUBIECTUL al II-lea 1 c). 2 a). 3 d). 4 a). 5 d). 6 a). SUBIECTUL al III-lea 1 4 vase și 17 flori. 2 b) $n = 3$. 3 a) $f(1) = 2$, deci $A \in Gf$. b) $x \in (-\infty; 1]$. 4 b) $(24 - 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. 5 a) $OPCN$ paralelogram $\Rightarrow OP \parallel NC$, $NC \parallel AD$, deci $OP \parallel AD$. b) $\mathcal{A}_{OPCN} = 4 \cdot \mathcal{A}_{OPM} = 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathcal{A}_{ADM} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \mathcal{A}_{ADC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$. 6 a) $17,757 \text{ kg}$ de vopsea care costă $443,92 \text{ lei}$. b) $48,1635 \text{ m}^2$ de tablă.



